

**Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського**

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

Вінниця – 2005

Упорядкував: *професор Трохименко В.С., кандидат
фізико-математичних наук.*

Даний збірник задач складений у відповідності до діючої програми з аналітичної геометрії для математичних спеціальностей педагогічних університетів. Задачником можуть користуватись не тільки студенти стаціонарного відділення, але й заочного та особи, які вивчають предмет самостійно.

Зміст

1	ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	4
1.1	Лінійні операції над векторами	4
1.2	Координати вектора	7
1.3	Скалярний добуток векторів	11
2	МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ	14
2.1	Система координат на площині	14
2.2	Ділення відрізка в заданому відношенні	16
2.3	Пряма лінія на площині	19
2.4	Коло і пряма лінія	27
3	ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ	30
3.1	Переміщення (рух) площини	30
3.2	Подібність площини	33
3.3	Афінні перетворення площини	35
4	ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	36
4.1	Еліпс	36
4.2	Гіпербола	40
4.3	Парабола	45
4.4	Загальне рівняння лінії другого порядку	47
5	МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТОРІ	52
5.1	Система координат в просторі	52
5.2	Векторний добуток векторів	56
5.3	Мішаний добуток векторів	58
5.4	Рівняння площини	60
5.5	Рівняння прямої в просторі	69
5.6	Задачі на площину і пряму в просторі	76
5.7	Задачі на сферу	81
6	ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	86
6.1	Поверхні обертання	86
6.2	Циліндричні і конічні поверхні	87

6.3	Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди	91
6.4	Загальна теорія поверхонь другого порядку	95
6.4.1	Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду	100
6.4.2	Перетин поверхні з прямою, асимптотичні на- прямки	102
6.4.3	Діаметральні площини, центр, головні напрямки	103

7 ВІДПОВІДІ

106

1 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Лінійні операції над векторами

1. Для довільного трикутника ABC точки M, N, P — відповідно середини сторін AC, AB і BC . Серед вказаних нижче пар векторів знайдіть пари рівних і пари колінеарних, але нерівних векторів: а) $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ і $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MC}$; е) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CM}$; ж) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{NP}$.
2. Нехай A, B, C, D — довільні точки, M, N, P, Q — середини відрізків AB, BC, CD, DA відповідно. Довести, що $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
3. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — паралелепіпед, O — точка перетину діагоналей, а M, N, P, Q — середини сторін AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 . Довести, що: а) $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON}$; в) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
4. Нехай $ABCD$ — паралелограм, O — точка перетину діагоналей, а E і F — відповідно середини паралельних сторін BC і AD . Побудувати на рисунку такі вектори: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FO}$; е) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CD}$.
5. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати кожний з таких векторів: $4\vec{a}$, $-\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$, $2\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$, $3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.
6. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірте на рисунку справедливості рівностей:
 - (a) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$;
 - (b) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$;
 - (c) $(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$;

- (d) $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$;
 (e) $\frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} + \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$;
 (f) $\left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) - \left(\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \vec{b}$.

7. Дано: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ і $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.
8. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ і $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$.
9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 12$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 8$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$, причому $|\vec{a}| = 3$ і $|\vec{b}| = 5$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
12. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ ділив пополам кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
13. В правильному п'ятикутнику $ABCDE$ задані вектори: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$ і $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Побудувати вектори:
- (a) $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$;
 (b) $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2} \vec{r}$;
 (c) $2\vec{m} + \frac{1}{2} \vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.
14. Довести, що якщо точка M є точка перетину медіан трикутника ABC , то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ і для довільної точки O справедлива рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

15. Дані три точки A, B і C . Побудувати точку Q таку, щоб

$$\overrightarrow{OQ} - 2 \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = \vec{0}.$$

16. A, B, C і D — довільні точки простору, M і N — середини відрізків AD і BC . Довести, що $2 \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

17. При яких умовах для ненулевих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можливі такі рівності:

(a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$;

(c) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(d) $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$;

(e) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

18. Довести, що існує трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам даного трикутника.

19. Довести, що для кожної скінченної множини точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n > 1$) існує єдина точка M така, що $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ і для довільної точки O виконується рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n} (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}).$$

20. Записати у векторній формі необхідну та достатню умову того, щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом.

21. Записати за допомогою векторів умову того, що точки A, B, C, D є вершини трапеції $ABCD$, де $AB \parallel CD$.

22. Записати у векторній формі необхідну і достатню умову того, щоб точка M була точкою перетину медіан трикутника ABC .

23. Точки P і Q — середини відрізків AB і CD відповідно. Довести, що середини відрізків AC, BD і PQ належать одній прямій.
24. Довести: для того щоб дві протилежні сторони чотирикутника були паралельні, необхідно і достатньо, щоб відрізок, який з'єднує їх середини, проходив через точку перетину діагоналей.
25. Довести: для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб відрізки, які з'єднують середини його протилежних сторін, проходили через точку перетину його діагоналей.
26. „Вектором“ будемо називати одностовпцеву матрицю висоти n з елементами з даного поля K , причому

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Довести, що множина таких матриць утворює векторний простір.

27. Нехай $\mathbf{C}$ — множина неперервних функцій $f(x)$, заданих на відрізку $[a; b]$. Перевірити, що природні операції $f(x) + g(x)$, $\lambda f(x)$, де $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbf{C}$, перетворюють множину $\mathbf{C}$ в векторний простір.
28. Нехай V_1 і V_2 — підпростори векторного простору V . Довести, що їх перетин є векторний простір.

1.2 Координати вектора

29. В трикутнику ABC вектори $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ і $\overrightarrow{CM}$ направлені по медіанам. Виразити їх через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

30. Нехай ABC — довільний трикутник, E і F — середини сторін AB і BC . Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.
31. Нехай $ABCD$ — паралелограм O — точка перетину його діагоналей. Покладаючи $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.
32. Дана трапеція $ABCD$, де $\overrightarrow{DC} = k \overrightarrow{AB}$. Точки M і N — середини основ AB і DC , P — точка перетину діагоналей AC і DB .
- (a) Взявши вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ за базисні, знайти координати векторів $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$.
- (b) Взявши вектори $\overrightarrow{PA}$ і $\overrightarrow{PB}$ за базисні, знайти розкладання векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.
33. В трикутнику ABC проведена бісектриса AD кута A . Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.
34. Точка M — центр ваги трикутника ABC . Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ в базисі $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.
35. Точка M — центр ваги трикутника ABC . Розкласти:
- (a) $\overrightarrow{MA}$ за векторами $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$;
- (b) $\overrightarrow{AB}$ за векторами $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$;
- (c) $\overrightarrow{OA}$ за векторами $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, де O — довільна точка простору.

36. В правильному шостикутнику $ABCDEF$ вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{AE} = \vec{e}_2$ вибрані як базисні. Знайти в даному базисі координати векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{EF}$.
37. В ромбі $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$ взяті за базисні. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ в даному базисі.
38. В трикутнику ABC проведена медіана BK і середня лінія MN , яка паралельна AC . Прямі BK і MN перетинаються в точці O . Знайти:
- координати векторів $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ і $\overrightarrow{AN}$ в базисі $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OM}$;
 - координати тих же векторів в базисі $\vec{e}_1 = \overrightarrow{KC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{KN}$.
39. В рівнобічній трапеції $ABCD$ кут A дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Розкласти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ за векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.
40. Точки P і Q — середини протилежних ребер BC і AD тетраедра, G — його центр ваги. Взявши вектори $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ за базисні, знайти координати вектора $\overrightarrow{PQ}$.
41. Дано неколінеарні вектори $\vec{a}, \vec{b}$. Довести, що система векторів $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ лінійно залежна, вектори $\vec{n}, \vec{p}$ не колінеарні. Розкласти вектор $\vec{m}$ за векторами $\vec{n}, \vec{p}$.
42. На площині дані три вектора своїми координатами в деякому базисі: $\vec{a}(4, -2)$, $\vec{b}(3, 5)$, $\vec{c}(-2, -12)$. Подати вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
43. Дані вектори $\vec{a}(1, -2)$, $\vec{b}(\frac{1}{2}, 1)$, $\vec{c}(2, 0)$. Визначити координати векторів $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$, $\frac{1}{2}(3\vec{a} - 5\vec{b})$, $\frac{1}{3}(\vec{c} - 2\vec{b})$.

44. Знайти координати вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, якщо
- $\vec{a}(-1, 2)$, $\vec{b}(-3, 1)$, $\vec{c}(1, 0)$;
 - $\vec{a}(4, -3)$, $\vec{b}(0, 2)$, $\vec{c}(3, 5)$.
45. Знайти значення α , при яких пари векторів колінеарні:
- $\alpha\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$;
 - $\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2$, $2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$;
 - $(\alpha - 1)\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $2\vec{e}_2$,
- де $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — базис на площині.
46. Визначити, при яких α, β вектори $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ і $\vec{b} = \alpha\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ колінеарні, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис в просторі.
47. На площині дані два вектори $\vec{p}(2, -3)$, $\vec{q}(1, 2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a}(9, 4)$ в базисі $\vec{p}, \vec{q}$.
48. На площині дані три вектори $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-2, 1)$, $\vec{c}(7, -4)$. Визначити розклад кожного з цих трьох векторів, приймаючи два інших за базисні.
49. Дані три вектори $\vec{a}(3, -1)$, $\vec{b}(1, -2)$, $\vec{c}(-1, 7)$. Визначити розклад вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}$.
50. Дані три вектори $\vec{p}(3, -2, 1)$, $\vec{q}(-1, 1, -2)$, $\vec{r}(2, 1, -3)$. Знайти розклад вектора $\vec{c}(11, -6, 5)$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
51. Відносно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ має координати $(2, 1)$. Знайти координати вектора $\vec{a}$ відносно базиса $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, якщо
- $\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = -\frac{2}{3}\vec{e}_2$;
 - $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
52. Серед векторів $\vec{a}_1(0, -3, 0)$, $\vec{a}_2(-2, 0, 5)$, $\vec{a}_3(0, 2, -1)$, $\vec{a}_4(0, 0, 4)$, $\vec{a}_5(1, 0, 0)$, $\vec{a}_6(0, 1, -3)$, $\vec{a}_7(1, -2, 3)$, $\vec{a}_8(0, 0, 0)$, заданих в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, вказати вектори:
- 1) колінеарні $\vec{e}_2$;
 - 2) компланарні з векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$.

53. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дані вектори $\vec{p}(-3, 6, -13)$, $\vec{a}(1, 0, -2)$, $\vec{b}(1, -1, 3)$, $\vec{c}(-2, 3, 0)$. Подати вектор $\vec{p}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
54. Дані чотири вектори $\vec{a}(2, 1, 0)$, $\vec{b}(1, -1, 2)$, $\vec{c}(2, 2, -1)$ і $\vec{d}(3, 7, -7)$. Розкласти кожен з цих векторів в базисі, який складається з решти трьох векторів.
55. До кола $\omega(O, R)$ з точки C проведені дотичні CA і CB (A і B — точки дотикання). Розкласти вектор:
- (а) $\overrightarrow{CO}$ за векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$;
- (б) $\overrightarrow{OC}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, якщо $\angle ACB = 60^\circ, 120^\circ, \alpha$.

1.3 Скалярний добуток векторів

56. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити: 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.
57. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$; знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, обчислити: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.
58. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.
59. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ і $|\vec{c}| = 4$, обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.
60. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожен з яких дорівнює 60° . Знаючи що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ і $|\vec{c}| = 6$, визначити модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
61. Дано, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

62. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
63. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.
64. Який кут утворюють між собою ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a} - 5\vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a} - 2\vec{b}$?
65. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$; знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

В наступних задачах координати векторів задані в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

66. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}(6, -8, -7.5)$, утворює гострий кут з віссю Oz . Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.
67. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2, 1, -1)$ а задовольняє умову $\vec{x}\vec{a} = 3$.
68. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що $|\vec{x}| = 14$.
69. Дані вектори $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(1, -3, 2)$, $\vec{c}(3, 2, -4)$. Визначити координати вектора $\vec{x}$, який задовольняє умови $\vec{x}\vec{a} = 10$, $\vec{x}\vec{b} = 22$, $\vec{x}\vec{c} = -40$.
70. Дані два вектори $\vec{a}(3, -1, 5)$ і $\vec{b}(1, 2, -3)$. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умови: $\vec{x}\vec{a} = 9$, $\vec{x}\vec{b} = -4$.
71. Обчислити, яку роботу виконує сили $\vec{f}(3, -5, 2)$, якщо її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}(2, -5, -7)$.

72. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{f}(3, -2, -5)$, якщо її точка прикладання рухаючись прямолінійно, зміщується з точки $A(2, -3, 5)$ в точку $B(3, -2, -1)$.

73. Дані три сили $\vec{M}(3, -4, 2)$, $\vec{N}(2, 3, -5)$ і $\vec{P}(-3, -2, 4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, зміщується з положення $M_1(5, 3, -7)$ в положення $M_2(4, -1, -4)$.

74. Нехай $\vec{x}^3 = (\vec{x}\vec{x})\vec{x}$. Розв'язати рівняння $\vec{x}^3 = \vec{a}$, де $\vec{a}$ — заданий ненульовий вектор.

75. Дані два неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Розв'язати відносно x рівняння:

$$\frac{\vec{a}^2 + x\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a} + x\vec{b}|} = \frac{\vec{b}^2 + \vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{a} + \vec{b}|}.$$

76. Дано прямокутник $ABCD$. Довести, що для довільної точки M простору виконуються рівності:

$$1) \quad \vec{MA}^2 + \vec{MC}^2 = \vec{MB}^2 + \vec{MD}^2;$$

$$2) \quad \vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}.$$

77. Користуючись скалярним добутком векторів, довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

78. В кубі знайти величину кута:

- 1) між його діагоналлю і мимобіжною з нею діагоналлю грані;
- 2) між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней;
- 3) між діагоналлю куба і перетинаючою її діагоналлю грані.

79. Знайти величину кута BAC рівнобедреного трикутника ABC , знаючи, що медіани BB_0 і CC_0 , які проведені з вершин основи, перпендикулярні.

80. Довести, що сума квадратів довжин ортогональних проекцій всіх ребер куба на площину не залежить від взаємного розташування куба і площини.

2 МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

2.1 Система координат на площині

В задачах 81 – 86 система координат афінна.

81. За координатами трьох вершин P, Q і R паралелограма обчислити координати четвертої його вершини:
1) $P(1, 4), Q(3, -1), R(0, 2)$; 2) $P(-1, 0), Q(2, 1), R(4, -1)$.
82. Довести, що три точки A, B і C належать одній прямій:
1) $A(2, 1), B(0, 5), C(4, -3)$; 2) $A(-1, 0), B(1, -2), C(3, -4)$.
Вияснити яка із трьох точок лежить між двома іншими.
83. Точки K і L — середини сторін BC і CD відповідно паралелограма $ABCD$. Знайти координати вершин паралелограма в репері $R = (A, K, L)$.
84. Відносно репера $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані координати точок $O'(2, -3), A'_1(1, 1), A'_2(3, -6), M(5, -1)$. Знайти координати точки M в репері $R' = (O', A'_1, A'_2)$.
85. В системі координат $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, де $ABCD$ — паралелограм, точка M має координати (α, β) . Обчислити координати цієї точки в системі координат:
1) $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$; 2) $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$; 3) $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
86. Відносно репера $R = (O, A_1, A_2)$ дані точки $A(2, 1), B(3, 0), C(1, 4)$. Знайти репер $R' = (O', A'_1, A'_2)$, відносно якого точки A, B, C мають координати $A(1, 6), B(1, 9), C(3, 1)$. Записати формули перетворення координат при переході від репера R до R' . Знайти координати точок O, A_1, A_2 в репері R' .

В задачах 87 – 103 система координат прямокутна декартова.

87. За координатами вершин A і B рівностороннього трикутника ABC обчислити координати третьої його вершини:
1) $A(1, 1)$, $B(2, -1)$; 2) $A(0, 0)$, $B(-2, 1)$.
88. За координатами вершин A і C квадрата $ABCD$ обчислити координати вершин B і D :
1) $A(1, 1)$, $C(-2, -1)$; 2) $A(-1, 0)$, $C(3, 1)$; 3) $A(4, 2)$, $C(0, 1)$.
89. Обчислити площу правильного трикутника, дві вершини якого є точки $A(-3, 2)$ і $B(1, 6)$.
90. Дані три вершини $A(3, -7)$, $B(5, -7)$, $C(-2, 5)$ паралелограма $ABCD$, четверта вершина якого D протилежна B . Визначити довжину діагоналей цього паралелограма.
91. Сторона ромба рівна $5\sqrt{10}$, дві його протилежні вершини є точки $P(4, 9)$ і $Q(-2, 1)$. Обчислити площу цього ромба.
92. Сторона ромба рівна $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини є точки $P(3, -4)$ і $Q(1, 2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.
93. Довести, що трикутник з вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$ прямокутний.
94. Довести, що точки $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$ і $D(-2, -1)$ є вершини квадрата.
95. Визначити, чи є серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(1, 1)$, $B(0, 2)$ і $C(2, -1)$ тупий кут.
96. На осі абсцис знайти таку точку M , відстань якої до точки $N(2, -3)$ була би рівною 5.
97. На осі ординат знайти таку точку M , відстань якої до точки $N(-8, 13)$ була би рівною 17.
98. Дані дві точки $M(2, 2)$ і $N(5, -2)$; на осі абсцис знайти таку точку P , щоб кут MPN був прямим.

99. Через точку $A(4, 2)$ проведено коло, яке дотикається обох координатних осей. Визначити його центр C і радіус R .
100. Через точку $M(1, -2)$ проведено коло радіуса 5, яке дотикається осі Ox . Визначити центр C кола.
101. Визначити координати точки M_2 симетричної точці $M_1(1, 2)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(1, 0)$ і $B(-1, -2)$.
102. Дані дві суміжні вершини квадрата $A(2, -1)$ і $B(-1, 3)$. Визначити дві його інші вершини.
103. В трикутнику ABC висота $CH = 3$ і $AC = BC$, кут BAC орієнтований додатньо. Знайти координати точки C , якщо $A(6, -2)$, $B(4, 0)$.

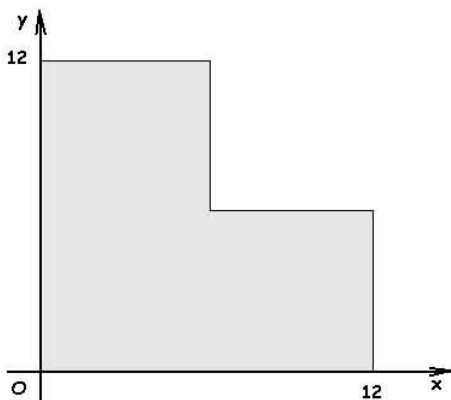
2.2 Ділення відрізка в заданому відношенні

104. Знайти координати середин відрізків A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , якщо $A_1(-1, 5)$, $B_1(-3, 3)$, $A_2(0, 4)$, $B_2(3, 2)$, $A_3(-2, 6)$, $B_3(1, 4)$.
105. Дані координати $A(-1, 5)$ і $B(3, 4)$ однорідного стержня. Обчислити координати його центра ваги.
106. Дані координати точок $P(-1, 5)$, $Q(3, 2)$.
 - (а) знайти координати точки M , яка симетрична точці P відносно точки Q ;
 - (б) знайти координати точки N , яка симетрична точці Q відносно точки P .
107. Дані вершини трикутника $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ і $C(-5, 7)$. Визначити середини його сторін.
108. Точки $M(2, -1)$, $N(-1, 4)$ і $P(-2, 2)$ є середини сторін трикутника. Визначити його вершин.
109. Дані три вершини паралелограма $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $C(-1, 3)$. Визначити четверту вершину D , протилежну B .

110. Дані дві суміжні вершини паралелограма $A(-4, 4)$, $B(2, 8)$ і точка перетину $M(2, 2)$ його діагоналей. Визначити дві інші вершини C і D .
111. Дані вершини трикутника $A(1, 4)$, $B(3, -9)$, $C(-5, 2)$. Визначити довжину його медіани, яка проведена з вершини B .
112. Даний чотирикутник $A(-1, 7)$, $B(5, 5)$, $C(7, -5)$, $D(3, -7)$.
- (а) Довести, що відрізки, які з'єднують середини сторін AD і BC , AB і CD , перетинаються і діляться точкою перетину пополам.
 - (б) Показати, що чотирикутник, вершини якого є середини сторін даного чотирикутника, є паралелограм.
113. Визначити координати точок, які ділять відрізок $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ у відношенні $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 3$.
114. Відрізок, обмежений точками $A(1, -3)$ і $B(4, 3)$, поділений на три рівних частини. Визначити координати точок поділу.
115. Дві вершини трикутника ABC мають координати $A(3, 6)$, $B(-3, 5)$. Визначити координати вершини C при умові, що середини сторін AC і BC лежать на різних осях координат.
116. Дані вершини трикутника $A(2, -5)$, $B(1, -2)$, $C(4, 7)$. Знайти точку перетину з стороною AC бісектриси його внутрішнього кута при вершині B .
117. Дані вершини трикутника $A(3, -5)$, $A(1, -3)$, $C(2, -2)$. Визначити довжину бісектриси його зовнішнього кута при вершині B . Система координат прямокутна декартова.
118. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(2, 2)$ і $Q(1, 5)$ поділений на три рівних частини.
119. Пряма проходить через точки $M_1(-12, -13)$ і $M_2(-2, -5)$. На цій прямій знайти точку, абсциса якої рівна 3.

120. Пряма проходить через точки $M(2, -3)$ і $N(-6, 5)$. На цій прямій знайти точку, ордината якої рівна -5 .
121. Пряма проходить через точки $A(7, -3)$ і $B(23, -6)$. Знайти точку перетину цієї прямої з віссю абсцис.
122. Пряма проходить через точки $A(5, 2)$ і $B(-4, -7)$. Знайти точку перетину цієї прямої з віссю ординат.
123. Дані вершини чотирикутника $A(-2, 14)$, $B(4, -2)$, $C(6, -2)$, $D(6, 10)$. Визначити точку перетину його діагоналей AC і BD .
124. Довести, що точка перетину $M(x, y)$ медіан трикутника з вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ має координати
- $$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$
125. Точка M перетину медіан трикутника лежить на осі абсцис, дві його вершини — точки $A(2, -3)$ і $B(-5, 1)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Визначити координати точок M і C .
126. Вершини однорідної трикутної пластинки знаходяться в точках $A(-1, 2)$, $B(3, 3)$ і $C(1, -1)$. Визначити координати центра ваги пластинки.
127. В точці $A(2, 5)$ розміщений вантаж в 60 г, а в точці $B(-3, 0)$ — вантаж в 40 г. Визначити координати центра ваги цієї системи.

- Однорідна пластинка має форму квадрата із стороною, рівною 12 , в якій зроблений квадратний виріз, прямі розрізу проходять через центр квадрата, вісі координат направлені по ребрам пластинки (див. рис.) Визначити центр ваги цієї пластинки.



129. Дані точки $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, в яких розміщені маси $m_1, m_2, \dots, m_n$. Довести, що координати центра ваги системи матеріальних точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ визначаються співвідношеннями

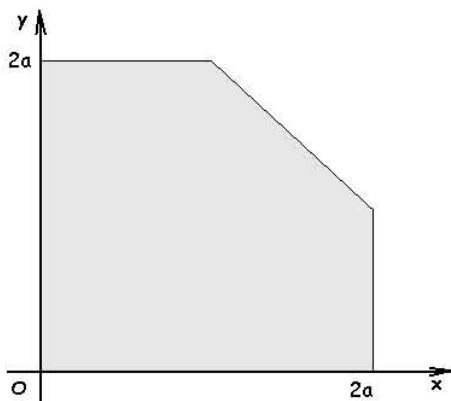
$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

130. В вершинах трикутника $A(1, 8), B(3, 4), C(4, 2)$ розміщені відповідно маси 30, 40 і 60 г.

- Визначити координати центра ваги системи матеріальних точок A, B і C .
- Знайти центр ваги системи при умові, що в точках A, B і C розміщені однакові маси.

131. Однорідний стержень зігнутий у вигляді трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2, -1), B(5, -1)$ і $C(2, 3)$. Визначити координати центра ваги цього трикутника.

132. Однорідна пластинка має форму квадрата зі стороною, рівною $2a$, від якого відрізаний трикутник; пряма розрізу з'єднує середини двох суміжних сторін, вісі координат направлені по ребрам пластинки (див. рис.). Визначити центр ваги пластинки.



2.3 Пряма лінія на площині

133. Написати рівняння прямої, яка:

- проходить через точки $A(-1, 1)$ і $B(2, 5)$;

- б) проходить через початок координат і точку $A(2, 5)$;
 - в) проходить через точку $A(2, -6)$ і паралельна вектору $\vec{a}(1, -1)$;
 - г) відтинає на осях координат відрізки $a = 3, b = -2$;
 - д) проходить через точку $A(3, 5)$ і паралельна осі Ox ;
 - е) проходить через точку $B(-1, 2)$ і паралельна осі Oy ;
 - ж) проходить через точку $A(1, -5)$ і паралельна прямій $x - 3y + 1 = 0$;
 - з) проходить через точку $A(2, 2)$ і паралельна прямій $x + y = 0$.
134. Написати параметричні рівняння прямої, яка:
- а) проходить через точку $P(-2, 3)$ паралельно вектору $\vec{a}(5, -1)$;
 - б) проходить через дві точки $A(0, -2), B(3, -4)$;
 - в) проходить через початок координат і паралельна вектору $\vec{p}(1, 1)$;
 - г) проходить через точку $M(1, -3)$ і паралельна осі Ox ;
 - д) проходить через дві точки $M_1(1, 2)$ і $M_2(1, -5)$.
135. Скласти рівняння прямих, які проходять через вершини трикутника $A(5, -4), B(-1, 3), C(-3, -2)$ паралельно протилежним сторонам.
136. Написати рівняння середніх ліній трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2, 6), B(-4, 0), C(4, 2)$.
137. Написати рівняння прямих, які містять медіани трикутника ABC :
- 1) $A(1, 1), B(2, 0), C(-1, 4)$; 2) $A(3, -1), B(-2, 1), C(0, 0)$.
138. Дані рівняння прямих, які містять середні лінії трикутника ABC :
- $$2x - y + 1 = 0, \quad x + 3y = 0, \quad -x + y + 2 = 0.$$
- Знайти рівняння прямих, які містять сторони трикутника.

139. Дані вершини трикутника $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ і $C(3, 5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини B .
140. Дані вершини трикутника $A(2, -2)$, $B(3, -5)$ і $C(5, 7)$. Скласти рівняння перпендикуляра, який опущений з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A .
141. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(3, 5)$ на однакових відстанях від точок $A(-7, 3)$ і $B(11, -15)$.
142. Знайти проекцію точки $P(-8, 12)$ на пряму, яка проходить через точки $A(2, -3)$ і $B(-5, 1)$.
143. Визначити координати точки, яка симетрична точці $M(2, -5)$ відносно прямої $2x + 8y - 15 = 0$.
144. Знайти точку M_1 , яка симетрична точці $M_2(8, -9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3, -4)$ і $B(-1, -2)$.
145. Дані точки $A(2, -1)$ і $B(3, 1)$. Визначити, чи розділені ці точки прямою l , яка задана рівнянням:

$$1) x + 3y - 5 = 0; \quad 2) 3x - y + 1 = 0; \quad 3) 2x + y = 0.$$

146. На осі абсцис знайти таку точку P , щоб сума її відстаней до точок $M(1, 2)$ і $N(3, 4)$ була найменшою.
147. На осі ординат знайти таку точку P , щоб різниця відстаней її від точок $M(-3, 2)$ і $N(2, 5)$ була найбільшою.
148. На прямій $2x - y - 10 = 0$ знайти точку Q , сума відстаней якої до точок $M(-5, 0)$ і $N(-3, 4)$ була б найменшою.
149. На прямій $2x - y - 5 = 0$ знайти точку P , сума відстаней якої до точок $A(-7, 1)$ і $B(-5, 5)$ була б найменшою.
150. На прямій $3x - y - 1 = 0$ знайти точку P , різниця відстаней якої до точок $A(4, 1)$, $B(0, 4)$ була б найбільшою.

151. Дані дві прямі $3x + y = 0$ і $2x - 3y + 1 = 0$ і точка $M(-2, 1)$. Знайти аналітичні умови, які визначають той кут, який утворений даними прямими, що містить точку M .
152. Визначити розташування точки $M(2, 6)$ і прямої $x - 3y - 5 = 0$ відносно трикутника ABC , якщо $A(0, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(4, 9)$.
153. Написати аналітичні умови, які визначають смугу, яка утворена прямими:
- 1) $3x + y - 1 = 0$, $6x + 2y + 3 = 0$;
 - 2) $x + 2y + 2 = 0$, $2x + 4y - 7 = 0$.
154. Дані три точки $A(-4, -2)$, $B(-2, 1)$ і $C(2, 3)$. Написати аналітичні умови, які визначають паралелограм $ABCD$.
155. Записати аналітичні умови, які визначають трикутник ABC , якщо:
- 1) $A(3, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 2)$;
 - 2) $A(0, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(3, -1)$.
156. Обчислити координати орта вектора нормалі прямої:
- 1) $x + 2y - 3 = 0$;
 - 2) $x - 3y - 1 = 0$;
 - 3) $4x + 3y + 6 = 0$.
157. Написати рівняння серединного перпендикуляра відрізка AB :
- 1) $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$;
 - 2) $A(0, -1)$, $B(2, -3)$;
 - 3) $A(1, 1)$, $B(-3, 0)$.
158. Дані рівняння прямих, які містять висоти трикутника, і координати однієї з вершин трикутника. Обчислити координати двох інших вершин цього трикутника:
- 1) $3x + 4y - 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, $A(5, -3)$;
 - 2) $3x + 4y - 2 = 0$, $4x - y + 2 = 0$, $A(0, -1)$.
159. Точка $A(-4, 5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій, рівняння якої $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

160. Дані дві протилежні вершини квадрата $A(-1, 3)$ і $C(6, 2)$. Скласти рівняння його сторін.
161. Промінь світла направлений по прямій $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.
162. Дані дві вершини трикутника $M_1(-10, 2)$ і $M_2(6, 4)$, його висоти перетинаються в точці $N(5, 2)$. Визначити координати третьої вершини M_3 .
163. Скласти рівняння сторін трикутника ABC , якщо дані одна з його вершин $A(1, 3)$ і рівняння двох медіан $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$.
164. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дані одна з його вершин $B(-4, -5)$ і рівняння двох висот $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.
165. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(4, -1)$ і рівняння двох бісектрис $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.
166. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2, 6)$, а також рівняння висоти $x - 7y + 15 = 0$ і бісектриси $7x + y + 5 = 0$, які проведені з однієї вершини.
167. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2, -1)$, а також рівняння висоти $3x - 4y + 27 = 0$ і бісектриси $x + 2y - 5 = 0$, які проведені з різних вершин.
168. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4, -1)$, а також рівняння висоти $2x - 3y + 12 = 0$ і медіани $2x + 3y = 0$, які проведені з однієї вершини.
169. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2, -7)$, а також рівняння висоти $3x + y + 11 = 0$ і медіани $x + 2y + 7 = 0$, які проведені з різних вершин.

170. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4, 3)$, а також рівняння бісектриси $x + 2y - 5 = 0$ і медіани $4x + 13y - 10 = 0$, які проведені з однієї вершини.
171. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(3, -1)$, а також рівняння бісектриси $x - 4y + 10 = 0$ і медіани $6x + 10y - 59 = 0$, які проведені з різних вершин.
172. Дані рівняння прямих $l_1 : Ax + By + C_1 = 0$, $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ ($C_1 \neq C_2$). Знайти відстань між прямими l_1 і l_2 .
173. Обчислити відстань між паралельними прямими в кожному з таких випадків:
- | | |
|---|--|
| 1) $3x - 4y - 10 = 0$,
$6x - 8y + 5 = 0$; | 2) $5x - 12y + 26 = 0$,
$5x - 12y - 13 = 0$; |
| 3) $4x - 3y + 15 = 0$,
$8x - 6y + 25 = 0$; | 4) $24x - 10y + 39 = 0$,
$12x - 5y - 26 = 0$. |
174. Точка $A(2, -5)$ є вершина квадрата, одна з сторін якого лежить на прямій, рівняння якої $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.
175. Дані рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ і одна з його вершин $A(-2, 1)$. Обчислити площу цього прямокутника.
176. Довести, що через точку $P(2, 7)$ можна провести дві прямі так, щоб їх відстані від точки $Q(1, 2)$ були рівними 5. Скласти рівняння цих прямих.
177. Довести, що через точку $C(7, -2)$ можна провести тільки одну пряму так, щоб відстань її від точки $A(4, -6)$ була рівною 5. Скласти її рівняння.
178. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $3x - 4y - 10 = 0$ і які відстоять від неї на відстань 3.

179. Дані дві суміжні вершини квадрата $A(2, 0)$ і $B(-1, 4)$. Скласти рівняння його сторін.
180. Дані рівняння двох сторін квадрата $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ і одна з його вершин $A(2, -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрата.
181. Скласти рівняння множини точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих:
- 1) $3x - y + 7 = 0$, $3x - y - 3 = 0$;
 - 2) $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$;
 - 3) $5x - 2y - 6 = 0$, $10x - 4y + 3 = 0$.
182. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які перетинаються:
- 1) $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$;
 - 2) $x - 2y - 3 = 0$, $2x + 4y + 7 = 0$;
 - 3) $3x + 4y - 1 = 0$, $5x + 12y - 2 = 0$.
183. Визначити чи лежить точка $M(1, -2)$ і початок координат в одному, в суміжних або вертикальних кутах, утворених при перетині двох прямих:
- 1) $2x - y - 5 = 0$, $3x + y + 10 = 0$;
 - 2) $4x + 3y - 10 = 0$, $12x - 5y - 5 = 0$;
 - 3) $x - 2y - 1 = 0$, $3x - y - 2 = 0$.
184. Визначити чи лежать точки $M(2, 3)$ і $N(5, -1)$ в одному, в суміжних або вертикальних кутах, утворених при перетині двох прямих:
- 1) $x - 3y - 5 = 0$, $2x + 9y - 2 = 0$;
 - 2) $2x + 7y - 5 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$;
 - 3) $12x + y - 1 = 0$, $13x + 2y - 5 = 0$.

185. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $3x - y - 4 = 0$ і $2x + 6y + 3 = 0$, в якому лежить початок координат.
186. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x - 7y + 5 = 0$ і $5x + 5y - 3 = 0$, суміжного з кутом, який містить початок координат.
187. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x + 2y - 11 = 0$ і $3x - 6y - 5 = 0$, в якому лежить точка $M(1, -3)$.
188. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$, суміжного з кутом, який містить точку $C(2, -1)$.
189. Дані дві прямі, які перетинаються:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Довести, що коли

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0,$$

то точка $M_0(x_0, y_0)$ належить одному з гострих кутів, які визначаються даними прямими.

190. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, утворених двома прямими $3x - 2y + 5 = 0$ і $2x + y - 3 = 0$, містить початок координат.
191. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, утворених двома прямими $3x - 5y - 4 = 0$ і $x + 2y + 3 = 0$, містить точку $M(2, -5)$.
192. Скласти рівняння бісектриси гострого кута, утвореного двома прямими $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$.
193. Дані рівняння прямих $l_1 : 2x - y - 5 = 0$, $l_2 : x + 3y + 7 = 0$. Обчислити косинус кута φ , утвореного прямими l_1, l_2 , якому належить точка $M_0(1, 1)$.

2.4 Коло і пряма лінія

В задачах цього параграфу система координат прямокутна декартова.

194. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

- 1) центр кола співпадає з точкою $C(2, -3)$, а його радіус дорівнює 7;
- 2) коло проходить через точку $A(2, 6)$, а його центр співпадає з точкою $C(-1, 2)$;
- 3) точки $A(3, 2)$ і $B(-1, 6)$ є кінці одного з діаметрів кола;
- 4) центр кола співпадає з точкою $C(1, -1)$, а пряма, рівняння якої $5x - 12y + 9 = 0$, є дотичною до кола;
- 5) коло проходить через точки $A(3, 1)$ і $B(-1, 3)$, а його центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$;
- 6) коло проходить через три точки $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ і $C(2, 0)$.

195. Точка $C(3, -1)$ є центр кола, яке відтинає на прямій, рівняння якої $2x - 5y + 18 = 0$, хорду довжини 6. Скласти рівняння цього кола.

196. Скласти рівняння кола, яке дотикається двох паралельних прямих: $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$, причому однієї з них в точці $A(2, 1)$.

197. Скласти рівняння кола, яке, маючи центр на прямій $2x + y = 0$, дотикається прямих $4x - 3y + 10 = 0$ і $4x - 3y - 30 = 0$.

198. Скласти рівняння кіл, які дотикаються прямих $2x - 3y - 10 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, а центри їх лежать на прямій $4x - 5y - 3 = 0$.

199. Написати рівняння кіл, які проходять через точку $A(-1, 5)$ і дотикаються двох прямих: $3x + 4y - 35 = 0$, $4x + 3y + 14 = 0$.

200. Написати рівняння кіл, які дотикаються трьох прямих:

$$3x + 4y - 35 = 0, \quad 3x - 4y - 35 = 0 \quad \text{і} \quad x - 1 = 0.$$

201. Знайти умову, при якій пряма $y = kx + b$ дотикається до кола $x^2 + y^2 = R^2$.

202. В прямокутній декартовій системі координат дані рівняння множин точок:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,

б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$,

в) $x^2 + xy - 2x = 0$,

г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0$,

д) $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

е) $x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0$,

ж) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Вияснити, які з наведених рівнянь визначають коло. Знайти координати центра і радіус кожного з них.

203. Знайти рівняння лінії центрів двох кіл, які задані рівняннями:

1) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ і $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$;

2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ і $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$;

3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x = 0$;

4) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$.

204. Скласти рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, який перпендикулярний до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

205. Обчислити найкоротшу відстань від точки до кола в кожному з таких випадків:

а) $A(6, -8)$, $x^2 + y^2 = 9$;

б) $B(3, 9)$, $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;

в) $C(-7, 2)$, $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

206. Визначити координати точок перетину прямої $7x - y + 12 = 0$ і кола $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

207. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0, \quad 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

208. Обчислити відстань від центра кола $x^2 + y^2 = 2x$ до прямої, яка проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$$

209. З точки $A\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 = 5$. Скласти їх рівняння.

210. З точки $A(1, 6)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Скласти їх рівняння.

211. З точки $A(4, 2)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 = 10$. Визначити кут, який утворений цими дотичними.

212. З точки $M(4, -4)$ проведені дотичні до кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0.$$

Обчислити довжину хорди, яка з'єднує точки дотикання.

213. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, які перпендикулярні до прямої $x - 2y + 9 = 0$.

214. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, які паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.

215. Обчислити довжину дотичної, яка проведена з точки $A(1, -2)$ до кола $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$.

216. Знайти множину точок, відношення відстаней яких до двох даних точок A і B є стале число і рівне λ .

217. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок A і B є величина стала.

218. Знайти множину точок, для кожної з яких сума квадратів відстаней до двох перпендикулярних прямих є стала величина λ^2 .
219. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней яких до трьох даних точок A, B і C є величина стала.
220. Дано коло і деяка точка A , яка лежить в площині кола. Відрізок AB (де B — довільна точка кола) точкою M поділений в сталому відношенні λ . Знайти множину точок M .

3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

3.1 Переміщення (рух) площини

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

221. Записати формули осьової симетрії площини за координатами двох симетричних точок: $A(1, -2)$, $B(3, 4)$.
222. Написати формули перетворення осьової симетрії, якщо вісь задана рівнянням $y = kx + b$.
223. Вісь симетрії l задана своїм рівнянням. Написати рівняння прямої m' , яка симетрична прямій m відносно осі l , якщо:
- 1) $l : x + y + 1 = 0$, $m : 2x - y - 2 = 0$;
 - 2) $l : -x + y = 0$, $m : x - 2y + 1 = 0$.
224. Написати формули перетворення, яке є композицією трьох осьових симетрій з осями $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 0$.
225. Довести, що дві різні осьові симетрії переставні тоді і тільки тоді, коли їх вісі взаємно перпендикулярні.
226. Довести, що композиція трьох осьових симетрій тоді і тільки тоді є осьова симетрія, коли ці вісі проходять через одну точку або паралельні одна одній.

227. В ортонормованому репері R дана точка $S(x_0, y_0)$ і даний кут $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Написати формули повороту f площини навколо точки S на кут α .
228. Поворот навколо точки $M(2, 1)$ відображає точку A на точку B . Обчислити координати точки B , якщо
- 1) $\alpha = 45^\circ, A(1, -2)$; 2) $\alpha = 120^\circ, A(1, 1)$; 3) $\alpha = 90^\circ, A(3, -1)$.
229. Обчислити координати центра повороту, заданого формулами:
- $$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2. \end{cases}$$
230. Написати рівняння образу прямої l при повороті навколо точки M на кут φ :
- 1) $M(0, 0), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad l: x + y - 2 = 0$;
- 2) $M(-2, 1), \quad \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad l: x - y + 1 = 0$;
- 3) $M(0, -1), \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad l: x + 2y = 0$.
231. На прямій m_1 , заданій рівнянням $2x + y - 1 = 0$, дана точка $M_1(2, -3)$, а на прямій m_2 , заданій рівнянням $3x - y + 2 = 0$, дана точка $M_2(-1, -1)$. Написати формули перетворення повороту f , при якому $f(M_1) = M_2, f(m_1) = m_2$.
232. Дані точка $M(5, 1)$ перетину медіан рівностороннього трикутника ABC і рівняння прямої $AB: 2x - y = 0$. Написати рівняння прямих AC, BC .
233. Довести, що композиція симетрій f_1, f_2 площини Π відносно двох точок O_1, O_2 є перенесення площини.
234. Дані два поворота з різними центрами. Побудувати нерухому точку композиції цих двох поворотів.

235. Написати формули ковзної симетрії, заданої віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $l : x - 2 = 0$, $\vec{a}(0, 3)$;

2) $l : x + y - 3 = 0$, $\vec{a}(-1, 1)$;

3) $l : y + 5 = 0$, $\vec{a}(2, 0)$;

4) $l : 2x - y + 1 = 0$, $\vec{a}(2, 4)$.

236. Знайти координати образу точки A при ковзній симетрії, яка задана віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $A(2, 1)$, $l : x + 5 = 0$, $\vec{a}(0, 2)$;

2) $A(0, -3)$, $l : x + y + 3 = 0$, $\vec{a}(-2, 2)$;

3) $A(0, 0)$, $l : x - 2y + 1 = 0$, $\vec{a}(6, 3)$.

237. Написати рівняння образу прямої m при ковзній симетрії, заданої віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $l : x + 2 = 0$, $\vec{a}(0, 3)$, $m : x - 3y + 1 = 0$;

2) $l : x - y + 1 = 0$, $\vec{a}(5, 5)$, $m : x + y = 0$;

3) $l : x + 2y = 0$, $\vec{a}(-2, 1)$, $m : x - 2y + 1 = 0$.

238. Знайти рівняння інваріантної прямої ковзної симетрії, заданої формулами:

$$x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 4, \quad y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y.$$

239. Написати формули переміщення, яке являє собою композицію трьох осових симетрій з осями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

240. Довести, що композиція двох ковзних симетрій з різними паралельними осями є перенесення.

241. В ортонормованому репері R перетворення f площини Π задано формулами:

1) $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}$.

Довести, що f — рух, і визначити його вид. Знайти інваріантні точки.

242. Дані два рівних відрізка AB і A_1B_1 . Скласти формули руху, який переводить A в A_1 , B в B_1 , якщо $A(3, 4)$, $B(0, 0)$, $A_1(0, 0)$, $B_1(5, 0)$.

243. Дані координати точок

$$A(\sqrt{3}, 1), B(0, 2), A'(2, \sqrt{3} - 2), B'(0, \sqrt{3} - 2).$$

Написати формули переміщення першого роду, знаючи, що $f(A) = A'$, $f(B) = B'$.

244. Скласти формули переміщення першого і другого роду, якщо відомо, що образи точок $(0, 1)$, $(1, 0)$ і $(1, 1)$ належать відповідно прямим $y = 0$, $x = 0$, $x + y - 1 = 0$.

245. Площина повертається навколо точки $S(2, 3)$ на кут α , такий, що $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. В яку пряму при цьому повороті перейде пряма l : $x + 2y - 3 = 0$?

246. Дані координати вершин трикутника ABC і $A'B'C'$: $A(2, -3)$, $B(5, 1)$, $C(0, 1)$, $A'(-3, 1)$, $B'(1, 4)$, $C'\left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$. Довести, що ці трикутники рівні. Знайти формули руху, який переводить (A, B, C) в (A', B', C') , і визначити вид цього руху.

247. Написати формули перетворення осьової симетрії, якщо вісь симетрії задана рівнянням: $Ax + By + C = 0$.

248. Довести, що точки, симетричні точці M перетину висот трикутника відносно прямих, що містять його сторони, лежать на колі, описаному навколо цього трикутника.

3.2 Подібність площини

249. На прямій l дані пари точок A і B , A_1 і B_1 . Побудувати центр гомотетії, яка точку A переводить в точку A_1 , а точку B — в точку B_1 .

250. В репері R дані координати точок $A(2, 1)$, $B(3, -2)$, $C(1, 0)$, $A'(-1, -5)$, $B'(-3, 1)$, $C'(1, -3)$. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ гомотетичні, і написати формули гомотетії h такої, що $h(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.
251. Довести, що два нерівних трикутника ABC і $A'B'C'$ гомотетичні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні сторони паралельні.
252. Довести, що одне з двох нерівних кіл може бути переведене в інше двома різними гомотетіями, причому сума коефіцієнтів цих гомотетій рівна нулеві.
253. Довести, що коли композиція гомотетії з центром A і гомотетії з центром B є гомотетія з центром C , то точки A , B і C належать одній прямій.
254. Дані три попарно нерівні кола. Довести, що центри додатних гомотетій цих кіл належать одній прямій.
255. В ортонормованому репері R дані координати вершин: $A(0, -3)$, $B(4, 0)$, $C(1, -1)$, $A'(-6, -6)$, $B'(0, 2)$, $C'\left(-\frac{26}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ трикутників ABC і $A'B'C'$. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ подібні. Знайти формули подібності.
256. Написати формули перетворення подібності першого роду, при якому $A(1, 2) \mapsto A_1(2, 0)$, $B(-2, 3) \mapsto B_1(0, 0)$. Обчислити координати інваріантної точки і знайти коефіцієнт подібності.
257. Написати формули перетворення подібності другого роду, при якому $A(1, 0) \mapsto A_1(0, 1)$, $B(-2, 1) \mapsto B_1(-1, 1)$. Скласти рівняння інваріантних прямих подібності та обчислити координати нерухомої точки.
258. Довести, що кожна подібність площини, відмінна від руху, є або композицією гомотетії і повороту навколо центра гомотетії, або композицією гомотетії і симетрії відносно прямої, що проходить через центр гомотетії.

259. Подібність f переводить три точки A, B, C , що не лежать на одній прямій, в точки A', B', C' відповідно. Побудувати образ точки M , а також образ прямої l .
260. Подібність першого роду задана двома парами відповідних точок. Побудувати інваріантну точку.

3.3 Афінні перетворення площини

261. Написати формули афінного перетворення, яке точки $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 1)$ переводить відповідно в точки $A'(-1, 10)$, $B'(6, 6)$, $C'(-4, 6)$.
262. Знайти інваріантні точки афінного перетворення, яке переводить точки $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(1, -1)$ в точки $A'(-3, 0)$, $B'(6, 2)$, $C'(10, -1)$.
263. Написати рівняння інваріантних прямих афінного перетворення, заданого в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ формулами:

$$\begin{aligned}x' &= 7x - y + 1, \\y' &= 4x + 2y + 4.\end{aligned}$$

264. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ написати формули афінного перетворення, якщо відомо, що прямі $l_1 : 2x - y + 3 = 0$ і $l_2 : x - y + 2 = 0$ є інваріантними прямими цього перетворення і точка $M(-1, 0)$ переходить в точку $M'(1, 2)$.
265. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані рівняння прямих $l_1 : x + y - 1 = 0$, $l'_1 : x - y - 3 = 0$, $l_2 : x - 2y + 1 = 0$, $l'_2 : 2x + y + 1 = 0$ і точки $M_1(0, 0)$, $M'_1(1, -1)$. Написати формули афінного перетворення f , яке переводить прямі l_1, l_2 в прямі l'_1, l'_2 і точку M_1 — в точку M'_1 .
266. Нехай в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані рівняння прямих
 $l : Ax + By + C = 0$, $l' : A'x + B'y + C' = 0$.

Довести, що коли при афінному перетворення f пряма l переходить в l' , то існує таке число λ , що для кожної точки $M(x, y) \in l$ і точки $f(M) = M'(x', y') \in l'$ виконується рівність:

$$A'x' + B'y' + C' = \lambda(Ax + By + C).$$

267. Афінне перетворення задане трьома парами відповідних точок:
 $A \mapsto A_1, B \mapsto B_1, C \mapsto C_1$:

- 1) для даної точки M побудувати відповідну точку M_1 ;
- 2) для даної прямої m побудувати відповідну пряму m_1 .

268. Довести, що довільні два паралелограми афінно еквівалентні.

269. Довести, що для довільної трапеції $ABCD$ існує афінно еквівалентна їй рівнобічна трапеція $A'B'C'D'$.

270. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = x + 3, y' = 2x - y + 1$.

271. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = x + 3y, y' = y$.

272. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 2x + 3y, y' = -3x + 2y$.

273. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 5x - 2y + 6, y' = 4x - y + 6$.

274. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 10x + 12y + 3, y' = 6x + 9y + 2$.

4 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4.1 Еліпс

275. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- 1) його піввісі рівні 5 і 2;
- 2) його велика вісь рівна 10, в відстань між фокусами $2c = 8$;
- 3) його мала вісь рівна 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
- 4) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 5) його велика вісь рівна 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 6) його мала вісь рівна 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
- 7) відстань між його директрисами рівна 5, а відстань між фокусами $2c = 4$;
- 8) його велика вісь рівна 8, а відстань між директрисами рівна 16;
- 9) його мала вісь рівна 6, а відстань між директрисами рівна 13;
- 10) відстань між його директрисами рівна 32 і $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

276. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- 1) його піввісі рівні відповідно 7 і 2;
- 2) його велика вісь рівна 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- 3) відстань між його фокусами $2c = 24$, а ексцентриситет дорівнює $\frac{12}{13}$;
- 4) його мала вісь рівна 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 5) відстань між його фокусами $2c = 6$ і відстань між директрисами рівна $16\frac{2}{3}$;
- 6) відстань між його директрисами рівна $10\frac{2}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

277. Даний еліпс $9x^2 + 24y^2 = 225$. Знайти: 1) його піввісі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.
278. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до однієї з директрис.
279. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дані:
- 1) точка $M_1(-2\sqrt{5}, 2)$ еліпса і його мала піввісь $b = 3$;
 - 2) точка $M_1(2, -2)$ еліпса і його велика піввісь $a = 4$;
 - 3) точки $M_1(4, -\sqrt{3})$ і $M_2(2\sqrt{2}, 3)$ еліпса;
 - 4) точка $M_1\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$;
 - 5) точка $M_1(\sqrt{15}, -1)$ еліпса і відстань між його фокусами $2c = 8$;
 - 6) точка $M_1(8, 12)$ еліпса і відстань $r_1 = 20$ від її лівого фокуса;
 - 7) точка $M_1(-\sqrt{5}, 2)$ еліпса і відстань між його директрисами рівна 10.
280. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь рівна $2a$, а фокуси знаходяться від вершин на відстані $\frac{1}{5}$ її довжини.
281. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між його фокусами є середнє арифметичне його осей.
282. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що:
- 1) його велика вісь рівна 26 і фокуси є $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$;
 - 2) його мала вісь рівна 2 і фокуси є $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$;

- 3) його фокуси є $F_1\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 4) його фокуси $F_1(1, 3)$, $F_2(3, 1)$ і відстань між директрисами рівна $12\sqrt{2}$.
283. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\frac{2}{3}$, фокус $F(2, 1)$ і рівняння відповідної директриси $x - 5 = 0$.
284. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\frac{1}{2}$, фокус $F(-4, 1)$ і рівняння відповідної директриси $y + 3 = 0$.
285. Точка $A(-3, -5)$ лежить на еліпсі, фокус якого $F(-1, -4)$, а відповідна директриса дана рівнянням $x - 2 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.
286. Точка $M_1(2, -1)$ лежить на еліпсі, фокус якого $F(1, 0)$, а відповідна директриса дана рівнянням $2x - y - 10 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.
287. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.
288. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярних до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.
289. Провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ паралельно прямій $4x - 2y + 23 = 0$ і обчислити відстань d між ними.
290. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку M_1 , найближчу до прямої $2x - 3y + 25 = 0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї прямої.
291. З точки $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти їх рівняння.

292. З точки $C(10, -8)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.
293. З точки $P(-16, 9)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
Обчислити відстань d від точки P до хорди еліпса, яка з'єднує точки дотикання.
294. Еліпс проходить через точку $A(4, -1)$ і дотикається до прямої $x + 4y - 10 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса при умові, що його вісі співпадають з осями координат.
295. Скласти рівняння еліпса, який дотикається до двох прямих

$$3x - 2y - 20 = 0, \quad x + 6y - 20 = 0,$$

при умові, що його вісі співпадають з осями координат.

296. Довести, що добуток відстаней від фокусів до довільної дотичної до еліпса дорівнює квадрату малої піввісі.
297. Пряма $x - y - 5 = 0$ дотикається еліпса, фокуси якого знаходяться в точках $F_1(-3, 0)$ і $F_2(3, 0)$. Скласти рівняння цього еліпса.

4.2 Гіпербола

298. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- 1) її вісі $2a = 10$ і $2b = 8$;
- 2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
- 3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

- 5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами 20;
- 6) відстань між директрисами рівна $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;
- 7) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і вісь $2b = 6$;
- 8) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;
- 9) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами рівна $12\frac{4}{5}$.

299. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

- 1) її піввісі $a = 6$, $b = 18$ (літерою a ми позначаємо піввісь гіперболи, розташовану на осі абсцис);
- 2) відстань між фокусами $2c = 10$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;
- 3) рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами рівна 48;
- 4) відстань між директрисами рівна $7\frac{1}{7}$ і ексцентриситет $\frac{7}{5}$;
- 5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між директрисами рівна $6\frac{2}{5}$.

300. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) піввісі a і b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

301. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти: 1) піввісі a і b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

302. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.
303. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, фокальний радіус її точки M , проведений з деякого фокуса, дорівнює 16. Обчислити відстань від точки M до однієї з цим фокусом директриси.
304. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки M гіперболи до директриси рівна 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, однієї з цієї директриси.
305. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, центр її лежить в початку координат, один з фокусів $F(12, 0)$. Обчислити відстань від точки M_1 гіперболи з абсцисою, рівною 13, до директриси, що відповідає заданому фокусові.
306. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{3}{2}$, центр її лежить в початку координат, одна з директрис задана рівнянням $x = -8$. Обчислити відстань від точки M_1 гіперболи з абсцисою, рівною 10, до фокуса, що відповідає даній директрисі.
307. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо дані:
- 1) точки $M_1(6, -1)$ і $M_2(-8, 2\sqrt{2})$ гіперболи;
 - 2) точка $M_1(-5, 3)$ гіперболи і ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;
 - 3) точка $M_1\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;
 - 4) точка $M_1\left(-3, \frac{5}{2}\right)$ гіперболи і рівняння директрис $x = \pm \frac{4}{3}$;
 - 5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і директрис $x = \pm \frac{16}{5}$.
308. Визначити ексцентриситет рівнобічної гіперболи.
309. Визначити ексцентриситет гіперболи, якщо відрізок між її вершинами видно з фокусів спряженої гіперболи під кутом в 60° .

310. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = 2$.
311. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать в вершинах еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.
312. Довести, що відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до її асимптоти рівна b .
313. Скласти рівняння гіперболи, знаючи, що:
- 1) відстань між її вершинами рівна 24 і фокуси є $F_1(-10, 2)$, $F_2(16, 2)$;
 - 2) фокуси є $F_1(3, 4)$, $F_2(-3, -4)$ і відстань між директрисами рівна 3.6;
 - 3) кут між асимптотами дорівнює 90° і фокуси є $F_1(4, -4)$, $F_2(-2, 2)$.
314. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\frac{5}{4}$, фокус $F(5, 0)$ і рівняння відповідної директриси $5x - 16 = 0$.
315. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\frac{13}{12}$, фокус $F(0, 13)$ і рівняння відповідної директриси $13y - 144 = 0$.
316. Точка $A(-3, -5)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2, -3)$, а відповідна директриса дана рівнянням $x + 1 = 0$. Скласти рівняння цієї гіперболи.
317. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.
318. Точка $M_1(1, -2)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2, 2)$, а відповідна директриса дана рівнянням $2x - y - 1 = 0$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

319. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярних до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

320. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, паралельних прямій $10x - 3y + 9 = 0$.

321. Провести дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = -1$ паралельно прямій $2x + 4y - 5 = 0$ і обчислити відстань між ними.

322. На гіперболі $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ знайти точку M_1 , найближчу до прямої $3x + 2y + 1 = 0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї точки.

323. З точки $C(1, -10)$ проведені дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.

324. Скласти рівняння гіперболи, яка дотикається двох прямих:

$$5x - 6y - 16 = 0, \quad 13x - 10y - 48 = 0,$$

за умови, що її вісі співпадають з осями координат.

325. Переконавшись, що точки перетину еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ і гіперболи $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ є вершинами прямокутника, скласти рівняння його сторін.

326. Записати рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

327. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої відстань між фокусами вдвічі більше відстані між директрисами.

328. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, фокальні рабіуси якої взаємно перпендикулярні.

329. Написати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, що проходять через точку $M(1, 4)$.
330. Записати рівняння тієї дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, яка перпендикулярна прямій $2x + 5y + 11 = 0$.

4.3 Парабола

331. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:
- 1) парабола розташована в правій напівплощині симетрично відносно осі Ox , і її параметр $p = 3$;
 - 2) парабола розташована в лівій напівплощині симетрично відносно осі Ox , і її параметр $p = 0, 5$;
 - 3) парабола розташована в верхній напівплощині симетрично відносно осі Oy , і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
 - 4) парабола розташована в нижній напівплощині симетрично відносно осі Oy , і її параметр $p = 3$.
332. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:
- 1) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $A(9, 6)$;
 - 2) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $B(-1, 3)$;
 - 3) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $C(1, 1)$;
 - 4) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $D(4, -8)$.
333. Скласти рівняння параболи, яка має фокус $E(0, -3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її вісь є вісь Oy .

334. Знайти фокус F і рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.
335. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 20x$, якщо ордината точки M рівна 7.
336. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M рівна 6.
337. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.
338. Скласти рівняння параболи, якщо даний фокус $F(-7, 0)$ і рівняння директриси $x - 7 = 0$.
339. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(7, 2)$ і директриса $x - 5 = 0$.
340. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(4, 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.
341. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(2, -1)$ і директриса $x - y - 1 = 0$.
342. Дані вершина параболи $A(6, -3)$ і рівняння її директриси $3x - 5y + 1 = 0$. Знайти фокус F цієї параболи.
343. Дані вершина параболи $A(-2, -1)$ і рівняння її директриси $x + 2y - 1 = 0$. Скласти рівняння цієї параболи.
344. Скласти рівняння прямої, яка дотикається параболи $y^2 = 8x$ і паралельна прямій $2x + 2y - 3 = 0$.
345. Скласти рівняння прямої, яка дотикається параболи $x^2 = 16y$ і паралельна прямій $2x + 4y + 7 = 0$.
346. Провести дотичну до параболи $y^2 = 12x$ паралельно прямій $3x - 2y + 30 = 0$ і обчислити відстань d між цією дотичною і даною прямою.

347. На параболі $y^2 = 64x$ знайти точку M_1 , найближчу до прямої $4x + 3y - 14 = 0$ і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї прямої.
348. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 36x$, проведених з точки $A(2, 9)$.
349. З точки $A(5, 9)$ проведені дотичні до параболи $y^2 = 5x$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.
350. Довести, що дві параболи, що мають спільну вісь і спільний фокус, розташований між їх вершинами, перетинаються під прямим кутом.
351. Довести, що коли дві параболи зі взаємно перпендикулярними осями перетинаються в чотирьох точках, то ці точки лежать на одному колі.
352. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(4, 2)$ і директриса $x + 3y - 6 = 0$. Визначити параметр параболи.
353. На прямій, рівняння якої $8x - 3y + 6 = 0$, знайти точку, яка однаково віддалена від прямої $x - 5 = 0$ і точки $A(-3, 2)$.
354. Знайти найменшу відстань між параболою $y^2 = 64x$ і прямою $4x + 3y + 46 = 0$.

4.4 Загальне рівняння лінії другого порядку

355. Знайти точки перетину кривої $x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$ з осями координат.
356. Обчислити довжину хорди, яка відтинається кривою $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ на осі абсцис.
357. При якому значенні параметра λ крива, рівняння якої є $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$, відтинає на осі ординат хорду довжиною в 3 одиниці і при якому значенні λ відповідна крива дотикається осі ординат?

358. Знайти точки перетину кривої $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ з прямими:

1) $5x - y - 5 = 0$; 2) $x + 2y + 2 = 0$;

3) $x + 4y - 1 = 0$; 4) $x - 3y = 0$.

359. Знайти центр кожної з ліній:

1) $x^2 - 4xy + 5y^2 + 20x + 16y + 5 = 0$;

2) $3x^2 + 8xy + 20y^2 - 12x + 4y + 5 = 0$;

3) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$;

4) $4x^2 + 10xy + 5y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$;

5) $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 1 = 0$;

6) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$.

360. Знайти центри таких кривих:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;

3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

5) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;

6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;

7) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

8) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$;

9) $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$;

10) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$.

361. Крива другого порядку проходить через початок координат, через точки $A(0, 1)$ і $B(1, 0)$. Крім того відомий її центр $C(2, 3)$. Скласти рівняння цієї кривої.

362. Знайти асимптоти наступних гіпербол:

1) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;

$$2) 3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0;$$

$$3) 10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0;$$

$$4) 2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0.$$

363. Крива другого порядку проходить через точку $M(1, -1)$ і має своїми асимптотами дві прямі: $2x + 3y - 5 = 0$ і $5x + 3y - 8 = 0$. Скласти рівняння цієї кривої.

364. Скласти рівняння кривої, яка дотикається прямої $4x + y + 5 = 0$ і має прямі $x - 1 = 0$ і $2x - y + 1 = 0$ своїми асимптотами.

365. В точках перетину кривої $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ з осями координат провести дотичні до цієї кривої.

366. Написати рівняння дотичних до кривої

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

в її точках, абсциси яких рівні -2 .

367. Знаючи рівняння дотичної до кривої, заданої загальним рівнянням, вивести рівняння дотичних до кривих, заданих найпростішими рівняннями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y^2 = 2px; \quad xy = m.$$

368. Через початок координат провести дотичні до кривої

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

369. Через точку $A(3, 4)$ провести дотичні до кривої

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

370. Серед прямих, що дотикаються кривої $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$, знайти ті, які паралельні осі абсцис.

371. До даної кривої $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ провести дотичні, паралельні прямій $3x + 3y - 5 = 0$ і визначити точки дотикання цих дотичних.

372. Скласти рівняння кривої другого порядку, що проходить через початок координат і дотикається прямої $4x + 3y + 2 = 0$ в точці $A(1, -2)$ і прямої $x - y - 1 = 0$ в точці $B(0, -1)$.
373. Через точку $M(2, 0)$ проведені дві прямі, що мають лише по одній спільній точці з кривою $3x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 4y - 5 = 0$. Скласти рівняння цих прямих і обчислити кут між ними.
374. При якому значенні параметра λ крива $x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 9 = 0$ перетинає пряму $2x - y + 7 = 0$ тільки в одній точці?
375. Через точку $M(1, -2)$ проведений діаметр кривої $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Знайти рівняння цього діаметра і діаметра до нього спряженого.
376. Дана крива $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$. Знайти діаметр, паралельний осі абсцис, і діаметр, йому спряжений.
377. Дана крива $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ і один з її діаметрів $x + 2y - 2 = 0$. Знайти діаметр, йому спряжений.
378. Скласти рівняння діаметра кривої $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$, паралельного прямій $2x - y + 5 = 0$.
379. Визначити діаметр кривої $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$, який утворює кут в 45° з віссю абсцис. Кут $\omega = \frac{\pi}{2}$.
380. Дана крива $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$. Знайти геометричне місце середин її хорд: 1) паралельних осі Ox ; 2) паралельних осі Oy ; 3) паралельних прямій $x + y + 1 = 0$.
381. Знайти діаметр кривої $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$, який проходить через середину хорди, що відтинається цією кривою на прямій $x - 2y - 1 = 0$.
382. Знайти середину хорди, яка відтинається кривою $2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$ на прямій $x + 3y - 12 = 0$.
383. Знайти головні вісі кривих:

- 1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$;
 - 2) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$;
 - 3) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$.
384. Знайти вісь параболи $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$.
385. Знайти спільний діаметр двох кривих: $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ і $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$.
386. Написати рівняння діаметра лінії $3x^2 - 5xy + y^2 + 8x = 0$, який ділить пополам хорди з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{2}{3}$.
387. Написати рівняння діаметра лінії $6x^2 - 9xy + 13y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, що проходить через точку $K(1, -2)$.
388. Знайти кутові коефіцієнти головних напрямків кожної з наступних ліній, заданих рівняннями:
- 1) $3x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y + 7 = 0$;
 - 2) $x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$;
 - 3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3y = 0$;
 - 4) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$.
389. Написати рівняння осей кожної з ліній:
- 1) $5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$;
 - 2) $7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.
390. Звести до канонічного виду рівняння ліній:
- 1) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$;
 - 2) $3x^2 + 4\sqrt{2}xy + 5y^2 + 6x - 1 = 0$;
 - 3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.
391. Звести до канонічного виду рівняння ліній:
- 1) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$;

$$2) 9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8x + 14y + 3 = 0;$$

$$3) x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0.$$

392. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду:

$$1) 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0;$$

$$2) 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0;$$

$$3) 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0;$$

$$4) 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0;$$

$$5) 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0;$$

$$6) 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0.$$

393. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду:

$$1) 14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 130 = 0;$$

$$2) 11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$$

$$3) 7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0;$$

$$4) 50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0;$$

$$5) 41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0;$$

$$6) 29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0;$$

$$7) 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0;$$

$$8) 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0.$$

5 МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТОРИ

5.1 Система координат в просторі

В задачах 394 – 400 система координат афінна.

394. Точки D , E , F — середини ребер BC , AC , AB тетраедра $OABC$. Знайти координати вершин цього тетраедра в репері (O, D, E, F) .

395. Дані точки $A(2, -1, 7)$, $B(4, 5, -2)$. Знайти відношення, в якому кожна координатна площина ділить відрізок AB .

396. Відомі координати вершин A , B і C паралелограма $ABCD$. Обчислити координати вершини D :

1) $A(2, 1, 1)$, $B(3, -1, 1)$, $C(0, 2, -3)$;

2) $A(3, 1, -1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 0, 3)$.

397. Точка O є точкою перетину діагоналей паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точки O_1, O_2, O_3 — відповідно центри граней $ADD_1 A_1$, $ABB_1 A_1$, $ABCD$. Написати формули переходу від репера $R = (A, B, C, D)$ до репера $R' = (O, O_1, O_2, O_3)$.

398. Довести, що точки A, B, C і D належать одній площині:

1) $A(3, 1, 1)$, $B(-2, 1, -2)$, $C(-3, -1, 0)$, $D(2, 0, 1.7)$;

2) $A(-2, 1, -1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, 4, -1)$, $D(-2, 4, -3)$.

399. Вектор $\vec{a}$ є напрямний вектор для прямої l . Паралельно l побудовані проекції A_1, A_2, A_3 точки $A(-3, 2, 1)$ на координатні площини. Обчислити координати цих проекцій, якщо

1) $\vec{a}(2, 1, -1)$; 2) $\vec{a}(-1, 1, 2)$.

400. Дані точки $A_1(-7, 3, -2)$, $A_2(0, 2, 1)$, $A_3(4, -1, 0)$, $A_4(-1, 0, -3)$. Довести, що $R' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ — репер, і знайти його орієнтацію, вважаючи вихідний репер додатньо орієнтованим.

В задачах 401 – 425 система координат прямокутна декартова.

401. Пряма AB перетинає координатні площини Oxy і Oyz в точках M і N . Обчислити довжину відрізка MN , якщо

1) $A(2, 1, 1)$, $B(-2, 0, 3)$;

2) $A(-3, 1, 1)$, $B(0, -1, 2)$.

402. В ортонормованому репері дані вершини $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$ трикутника ABC , AD — бісектриса його внутрішнього кута. Знайти координати точки D і довжину відрізка AD .

403. Діагональ OD прямокутного паралелепіпеда утворює кути 60° з ребрами OA і OB . Який кут вона утворює з ребром OC ?
404. Обчислити координати ортогональної проекції C_1 точки C на пряму AB :
- 1) $A(2, -1, 0)$, $B(-1, 3, 1)$, $C(0, 1, -1)$;
 - 2) $A(3, 1, 1)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(1, -1, 2)$.
405. Дані дві точки A і B . Знайти множину точок C , для яких ABC — рівносторонній трикутник:
- 1) $A(2, 3, -1)$, $B(-1, 0, 1)$;
 - 2) $A(-2, 1, 1)$, $B(-1, 1, -2)$.
406. На прямій AB знайти точку, найближчу до осі Oz :
- 1) $A(1, 2, -1)$, $B(3, -1, 1)$;
 - 2) $A(3, 4, 1)$, $B(-2, 1, 2)$.
407. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1, 2, -4)$, $B(4, 0, -10)$, $C(-2, 6, 8)$. Знайти внутрішні кути цього трикутника.
408. Довести, що трикутник ABC рівносторонній, якщо:
- 1) $A(2, 3, -1)$, $B(3, -1, 2)$, $C(-1, 2, 3)$;
 - 2) $A(m, n, p)$, $B(n, p, m)$, $C(p, m, n)$.
409. Дані точки: $A(1, -2, -3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(3, 1, -9)$, $D(-1, 1, 12)$. Обчислити відстань між 1) A і C ; 2) B і D ; 3) C і D .
410. Довести, що трикутник з вершинами $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ і $C(-3, 2, 1)$ рівнобедрений.
411. Довести, що трикутник з вершинами $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ і $C(1, -3, 2)$ прямокутний.

412. Визначити чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника $M_1(4, -1, 4)$, $M_2(0, 7, -4)$, $M_3(3, 1, -2)$.
413. Довести, що внутрішні кути трикутника $M(3, -2, 5)$, $N(-2, 1, -3)$, $P(5, 1, -1)$ гострі.
414. На осі абсцис знайти точку, відстань якої від точки $A(-3, 4, 8)$ рівна 12.
415. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1, -3, 7)$ і $B(5, 7, -5)$.
416. Дані вершини $M_1(3, 2, -5)$, $M_2(1, -4, 3)$, $M_3(-3, 0, 1)$ трикутника. Знайти середини його сторін.
417. Дані вершини $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -6)$, $C(-5, 0, 2)$ трикутника. Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини A .
418. Дані дві вершини $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $E(4, -1, 7)$. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.
419. Дані три вершини $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ і $C(1, 2, -3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D , протилежну B .
420. Дані три вершини $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ і $C(-1, 1, 2)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D .
421. Відрізок прямої, обмежений точками $A(-1, 8, 3)$ і $B(9, -7, -2)$, поділений точками C, D, E, F на п'ять рівних частин. Знайти координати цих точок.
422. Визначити координати кінців відрізка, який точками $C(2, 0, 2)$ і $D(5, -2, 0)$ поділений на три рівних частини.
423. Дані вершини трикутника $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 3)$ і $C(-4, 7, 5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B .

424. Дані вершини трикутника $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ і $C(-5, 2, -6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A .
425. Пряма проходить через дві точки $M_1(-1, 6, 6)$ і $M_2(3, -6, -2)$. Знайти точки її перетину з координатними площинами.

5.2 Векторний добуток векторів

426. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, обчислити $||[\vec{a}, \vec{b}]||$.
427. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ і $\vec{a} \vec{b} = 12$. Обчислити $||[\vec{a}, \vec{b}]||$.
428. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ і $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 72$. Обчислити $\vec{a} \vec{b}$.
429. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити:

$$1) \quad ||[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]||; \quad 2) \quad ||[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]||.$$

430. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, обчислити:

$$1) \quad [\vec{a}, \vec{b}]^2, \quad 2) \quad [2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2, \quad 3) \quad [\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2.$$

431. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ були колінеарні?
432. Дані довільні вектори: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Довести, що вектори $\vec{a} = [\vec{p}, \vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q}, \vec{n}]$, $\vec{c} = [\vec{r}, \vec{n}]$ компланарні.
433. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Довести, що $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.
434. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ пов'язані співвідношеннями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$. Довести колінеарність векторів $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{c}$.

435. Дані вектори $\vec{a}(3, -1, -2)$ і $\vec{b}(1, 2, -1)$. Знайти координати векторних добутків:
 1) $[\vec{a}, \vec{b}]$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; 3) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.
436. Дані точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ і $C(3, 2, 1)$. Знайти координати векторних добутків 1) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$; 2) $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.
437. Дані точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ і $C(5, 2, 6)$. Обчислити площу трикутника ABC .
438. Дані вершини трикутника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ і $C(1, 3, -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .
439. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}(2, -2, -3)$ і $\vec{b}(2, 3, 6)$.
440. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}(4, -2, -3)$ і $\vec{b}(0, 1, 3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}| = 26$, знайти його координати.
441. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a}(8, -15, 3)$, утворює гострий кут з віссю Ox . Знаючи, що $|\vec{m}| = 51$, знайти його координати.
442. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2, -3, 1)$ і $\vec{b}(1, -2, 3)$ і задовольняє умову: $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
443. Обчислити площу паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 12$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$.
444. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(3, 4, -1)$, $B(2, 0, 3)$ і $C(-3, 5, 4)$. Система координат прямокутна декартова.
445. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

446. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ і $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$.

5.3 Мішаний добуток векторів

447. Визначити, чи є трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо:

- 1) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$;
- 2) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$;
- 3) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$;
- 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$;
- 5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j}$;
- 6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

448. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, утворюючи праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

449. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівний 30° . Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

450. Довести тотожність $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

451. Довести тотожність $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, де λ і μ — які завгодно числа.

452. Довести, що необхідною і достатньою умовою компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є залежність $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, де принаймні одне з чисел α, β, γ не дорівнює нулеві.

453. Дані три вектори: $\vec{a}(1, -1, 3)$, $\vec{b}(-2, 2, 1)$, $\vec{c}(3, -2, 5)$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

454. Встановити чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(2, 3 - 1)$, $\vec{b}(1, -1, 3)$, $\vec{c}(1, 9, -1)$;
- 2) $\vec{a}(3, -2, 1)$, $\vec{b}(2, 1, 2)$, $\vec{c}(3, -1, -2)$;

$$3) \vec{a}(2, -1, 2), \vec{b}(1, 2, -3), \vec{c}(3, -4, 7).$$

455. Довести, що чотири точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежать в одній площині.

456. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ і $D(4, 1, 3)$.

457. Дані вершини тетраедра: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 3)$. Знайти довжину висоти, яка опущена з вершини D .

458. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на осі Oy .

459. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

460. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

1) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ і $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, де $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

2) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, де $|\vec{m}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 135^\circ$.

461. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах:

$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}$ і $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, якщо за основу взятий паралелограм, побудований на $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Крім того, відомо, що $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

462. Перевірити чи компланарні дані вектори:

$$1) \vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}, \vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}, \vec{r} = 7\vec{a} + 14\vec{b} - 13\vec{c};$$

$$2) \vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}, \vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}, \vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c};$$

$$3) \vec{p} = [\vec{a}, \vec{m}], \vec{q} = [\vec{b}, \vec{m}], \vec{r} = [\vec{c}, \vec{m}].$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — взаємно перпендикулярні орти.

463. Об'єм правильної трикутної піраміди з довжиною ребра a дорівнює $\frac{1}{6} a^3$. Знайти величину плоского кута при вершині піраміди.
464. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, вершинами якого є вершина паралелепіпеда і центри, граней що через неї не проходять.
465. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, ребрами якого є діагоналі трьох граней паралелепіпеда, які виходять з однієї з його вершин.
466. Довжина діагоналі куба дорівнює a . Обчислити відстань між діагоналям, що не перетинаються, двох суміжних граней куба.

5.4 Рівняння площини

467. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, 1, -1)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(1, -2, 3)$.
468. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n}(5, 0, -3)$.
469. Точка $P(2, -1, -1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.
470. Дані дві точки $M_1(3, -1, 2)$ і $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$.
471. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3, 4, -5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}_1(3, 1, -1)$ і $\vec{a}_2(1, -2, 1)$.
472. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2, 1, -3)$ і $M_2(3, 1, 2)$ паралельно вектору $\vec{a}(3, -1, 4)$.
473. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$ і $M_3(2, 0, 2)$.

474. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

475. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають перпендикулярні площини:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

476. Визначити, при яких значеннях l і m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

477. Визначити, при яких значеннях l наступні пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

478. Визначити двохгранні кути, утворені перетином наступних пар площин:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

2) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

3) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

479. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.
480. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3, -2, -7)$ паралельно площині $2x - 3z + 5 = 0$.
481. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно двом площинам: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.
482. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, -1, 1)$ перпендикулярно двом площинам $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.
483. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1, -1, -2)$ і $M_2(3, 1, 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.
484. Встановити, що три площини $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку, та обчислити її координати.
485. Довести, що три площини $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходять через одну пряму.
486. Довести, що три площини $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ перетинаються по трьом різним паралельним прямим.
487. Визначити, при яких значеннях a і b площини $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$: 1) мають одну спільну точку; 2) проходять через одну пряму; 3) перетинаються по трьом різним паралельним прямим.
488. Скласти рівняння площини, яка проходить:
- 1) через точки $M_1(7, 2, -3)$ і $M_2(5, 6, -4)$ паралельно осі Ox ;
 - 2) через точки $P_1(2, -1, 1)$ і $P_2(3, 1, 2)$ паралельно осі Oy ;

3) через точки $Q_1(3, -2, 5)$ і $Q_2(2, 3, 1)$ паралельно осі Oz .

489. Обчислити площу трикутника, який відтинає площина $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ від координатного кута Oxy .

490. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0$$

і координатними площинами.

491. Площина проходить через точку $M_1(6, -10, 1)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$ і на осі аплікат відрізок $c = 2$. Скласти для цієї площини рівняння "у відрізках".

492. Площина проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$ і $M_2(-3, 2, 1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$. Скласти для цієї площини рівняння "у відрізках".

493. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, -3, -4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини.

494. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, 4, -1)$, $M_2(-13, 2, -10)$ і відтинає на осях абсцис і аплікат відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

495. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі Oz відрізок $c = -5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(-2, 1, 3)$.

496. Скласти рівняння площини, яка паралельна вектору $\vec{l}(2, 1, -1)$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = 3$, $b = -2$.

497. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$.

498. Обчислити відстань d від точки до площини в кожному з наступних випадків:

- 1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;
 2) $M_2(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;
 3) $M_3(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$.
499. Обчислити відстань d від точки $P(-1; 1; -2)$ до площини, що проходить через три точки $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.
500. Визначити, чи лежить точка $Q(2; -1; 1)$ і початок координат по один або по різні боки відносно кожної з наступних площин:
- 1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;
 3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; 4) $2x - y + z + 11 = 0$;
 5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.
501. Довести, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(3; -2; 1)$ і $M_2(-2; 5; 2)$.
502. Довести, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(1; 4; -3)$ і $M_2(2; 5; 0)$.
503. В кожному з наступних випадків обчислити відстань між паралельними площинами:
- 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$;
 $x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;
 3) $2x - y + 2z + 9 = 0$; 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$;
 $4x - 2y + 4z - 21 = 0$; $16x + 12y - 15z + 25 = 0$;
 5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$; 6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$,
 $15x - 16y + 12z - 25 = 0$; $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.
504. Дві грані куба лежать на площинах
- $$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0.$$

Обчислити об'єм цього куба.

505. На осі Oy знайти точку, яка знаходиться на відстані $d = 4$ від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$.
506. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1; -2; 0)$ і від площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.
507. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.
508. Вивести рівняння геометричного місця точок, відстань яких від площини $4x - 4y - 2z + 3 = 0$ дорівнює 2.
509. Скласти рівняння площин, паралельних площині

$$2x - 2y - z - 3 = 0,$$

які знаходяться від неї на відстані $d = 5$.

510. В кожному з наступних випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 4x - y - 2z - 3 = 0; & 2) \quad & 3x + 2y - z + 3 = 0; \\ & 4x - y - 2z - 5 = 0; & & 3x + 2y - z - 1 = 0. \end{aligned}$$

511. В кожному з наступних випадків скласти рівняння площин, які ділять пополам двохгранні кути, утворені двома площинами, що перетинаються:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x - 3y + 2z - 5 = 0; & 2) \quad & 5x - 5y - 2z - 3 = 0; \\ & 3x - 2y - z + 3 = 0; & & x + 7y - 2z + 1 = 0. \end{aligned}$$

512. В кожному з наступних випадків визначити, чи лежить точка $M(2; -1; 3)$ і початок координат в одному, в суміжних або вертикальних двохгранних кутах, утворених при перетині двох площин:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2x - y + 3z - 5 = 0; & 2) \quad & 2x + 3y - 5z - 15 = 0; \\ & 3x + 2y - z + 3 = 0; & & 5x - y - 3z - 7 = 0. \end{aligned}$$

513. В кожному з наступних випадків визначити, чи лежать точки $M(2; -1; 1)$ і $N(1; 2; -3)$ в одному, в суміжних або вертикальних двохгранних кутах, утворених при перетині двох площин:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3x - y + 2z - 3 = 0; \quad 2) \quad 2x - y + 5z - 1 = 0; \\ & x - 2y - z + 4 = 0; \quad 3x - 2y + 6z - 1 = 0. \end{aligned}$$

514. Визначити, чи лежить початок координат всередині гострого або тупого кута, утвореного двома площинами: $x - 2y + 3z - 5 = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$.
515. Визначити, чи лежить точка $M(3; 2; -1)$ всередині гострого або тупого кута, утвореного двома площинами: $5x - y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 2z + 5 = 0$.
516. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам той двохгранний кут між двома площинами $2x - 14y + 6z - 1 = 0$, $3x + 5y - 5z + 3 = 0$, в якому лежить початок координат.
517. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам двохгранний кут між двома площинами $2x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + 2y - 6z - 1 = 0$, в якому лежить точка $M(1; 2; -3)$.
518. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам гострий двохгранний кут, утворений двома площинами: $2x - 3y - 4z - 3 = 0$, $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.
519. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам тупий двохгранний кут, утворений двома площинами: $3x - 4y - z + 5 = 0$, $4x - 3y + z + 5 = 0$.
520. Записати параметричні рівняння площини трикутника ABC , якщо в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дані координати його вершин: $A(2; -5; 1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(0; 0; -1)$.
521. Площина Π задана рівнянням $5x - 2y - 3z + 6 = 0$. Знайти координати якого-небудь вектора $\vec{a}$, паралельного площині Π .

522. Написати параметричні рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2; -1; 3)$ паралельно площині $2x - y + 3z - 1 = 0$.
523. В афінному репері дані вершини $A(4; 0; 2)$, $B(0; 5; 1)$, $C(4; -1; 3)$, $A_1(3, -1, 5)$ паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Написати рівняння площин, які містять його грані.
524. Дані дві площини рівняннями:

$$\Pi_1: x - y - z - 7 = 0, \quad \Pi_2: 2x + y - 3z + 3 = 0$$

в афінному репері.

- (а) Скласти систему лінійних нерівностей, які визначають той двохгранний кут, утворений площинами Π_1 , Π_2 , якому належить точка $M_0(3; -4; 3)$.
- (б) Визначити розташування точок $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(3; -4; -5)$ відносно двохгранних кутів, утворених площинами Π_1 , Π_2 .
525. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дані координати вершин $A(0; 0; 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$ тетраедра. Визначити розташування точки $M_0\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ відносно цього тетраедра.
526. Дані рівняння площин

$$\Pi_1: x - 2y - 3z + 5 = 0, \quad \Pi_2: 2x - 4y - 6z + 7 = 0$$

в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Визначити нерівностями кожен з трьох областей Φ_i , на які площини Π_1 , Π_2 поділяють всі точки простору, які їм не належать ($i = 1, 2, 3$).

527. Написати рівняння площини Π , що проходить через основу $M_0(2; 6; -4)$ перпендикуляра, проведеного через початок O репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ до площини Π .
528. Дані координати вершин $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(0; 2; -3)$, $D(-1; -2; 1)$ тетраедра $ABCD$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Знайти координати точки D' , симетричної вершині D відносно площини грані ABC .

529. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2; -3; 3)$, $M_2(5; 1; 2)$ перпендикулярно до площини $x - 3y - 2z - 3 = 0$.
530. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$ перпендикулярно до площин $x + 3y - z + 3 = 0$, $2x + y - 2z + 1 = 0$.
531. Обчислити косинус двохгранного кута, утвореного площинами $2x - y - 2z + 5 = 0$, $x - 2y - 2z + 7 = 0$, якому належить точка $M_0(2, -3, -1)$.
532. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння площин
 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,
а також точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Довести, що точка M_0 лежить всередині гострого кута, утвореного площинами Π_1 , Π_2 , тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0$.
533. Дані вершини тетраедра $A(0; 0; 3)$, $B(1; -2; 1)$, $C(0; -2; 2)$, $D(1; 1; 1)$. Обчислити довжину висоти DH ($R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).
534. Дані рівняння паралельних площин $4x + 6y + 2z - 7 = 0$, $2x + 3y + z + 5 = 0$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Написати рівняння площини, що проходить посередині між даними площинами.
535. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння площин $2x - y - z + 3 = 0$, $4x - 2y - 2z + 5 = 0$. Написати рівняння площини, паралельної даним площинам, яка не розташована між ними і знаходиться від першої площини на відстані вдвічі більшій, ніж від другої.
536. Дані рівняння паралельних площин $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ($D_1 \neq D_2$) в ортонормованому репері R . Знайти відстань між цими площинами.

537. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння площин двох граней куба:

$$x - 2y - 2z + 4 = 0, \quad 2x + 2y - z - 13 = 0$$

і координати його центра $M_0(1; 1; -2)$. Знайти рівняння решти граней куба.

538. Написати рівняння бісекторної площини того двохгранного кута, утвореного площинами $x - y + 2z - 1 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, якому належить точка $M_0(1; 1; 1)$.

539. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ написати рівняння бісекторної площини того двохгранного кута, утвореного площинами $x - y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - 2z + 7 = 0$, якому належить точка $M_0(1; -1; 1)$.

540. Трикутна піраміда задана координатами своїх вершин: $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(1; 5; 7)$. Написати рівняння бісекторної площини двохгранного кута $B \cdot (AD) \cdot C$.

541. Дані вершини тетраедра $A(-1; -2; 0)$, $B(5; 0; 5)$, $C(3; 2; 2)$, $D(-1; 0; 2)$. Написати рівняння бісекторної площини внутрішнього кута при ребрі AB і знайти косинус цього кута.

542. Написати рівняння бісекторної площини гострого двохгранного кута, утвореного площинами $3x - 2y - z + 3 = 0$, $2x - 3y + z - 5 = 0$.

543. В афінному репері дані рівняння площин, які містять грані тетраедра $ABCD$: $\Pi_1 : x + 2y + z + 2 = 0$, $\Pi_2 : x - y - z = 0$, $\Pi_3 : x + y - 1 = 0$, $\Pi_4 : 3x + z + 1 = 0$. Написати рівняння площини, що проходить через вершину $A = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$, паралельно площині Π_4 .

5.5 Рівняння прямої в просторі

544. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2; 0; -3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}(2; -3; 5)$; 2) прямій $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) осі Ox ; 4) осі Oy ; 5) осі Oz .

545. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки: 1) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$; 3) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.
546. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1; -1; -3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}(2; -3; 4)$; 2) прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$; 3) прямій $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$.
547. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через дві дані точки: 1) $(3; -1; 2)$, $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$, $(3; -1; 0)$; 3) $(0; 0; 1)$, $(0; 1; -2)$.
548. Через точки $M_1(-6; 6; -5)$ і $M_2(12; -6; 1)$ проведена пряма. Визначити точки перетину цієї прямої з координатними площинами.
549. Дані вершини трикутника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ і $C(4; -7; -2)$. Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C .

В задачах 550 – 565 система координат прямокутна декартова.

550. Дані вершини трикутника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ і $C(-5; 14; -3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині C .
551. Дані вершини трикутника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ і $C(-7; 11; 6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A .
552. Дані вершини трикутника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ і $C(5; 1; -7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.
553. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2; 3; -5)$ паралельно прямій $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

554. Скласти канонічні рівняння наступних прямих:

$$1) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

555. Скласти параметричні рівняння наступних прямих:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

556. Довести паралельність прямих:

$$1) \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$$
$$2) \quad \begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$$
$$3) \quad \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

557. Довести перпендикулярність прямих:

$$1) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z - 9 = 0; \end{cases}$$
$$2) \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$
$$3) \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

558. Знайти гострий кут між прямими:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

559. Знайти тупий кут між прямими: $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ і $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$.

560. Визначити косинус кута між прямими:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

561. Довести, що прямі, які задані параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4, \end{cases}$$

перетинаються.

562. Дані прямі

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2};$$

при якому значенні l вони перетинаються?

563. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(6; -2; -3)$ і перетинає пряму $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

564. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-4; -5; 3)$ і перетинає дві прямі

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

565. Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, заданих рівняннями $x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ і $x = t + 1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

566. Визначити, яка з точок $M_1(-1; 2; -1)$, $M_2(2; 1; 3)$ належить прямій l , яка задана в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ рівняннями: $x = 2 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = -3 + 2t$.

567. Написати параметричні рівняння прямої l , що проходить через точку $M_0(2; 3; -1)$ паралельно прямій l' , заданої в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ рівняннями: $x - 2y - 3z - 3 = 0$, $2x + y - z + 5 = 0$.

568. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; -1; 0)$ перпендикулярно до прямої $l : x = t, y = -1 - 3t, z = -1 - 2t$ і перетинає її ($R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

569. Знайти координати точки M_2 , симетричної точці $M_1(3; 1; -4)$ відносно прямої l , заданої в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями:

$$x = -1 + 2t, y = -4 - t, z = -1 - t.$$

570. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t, \\ z = 3 + 2t; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Обчислити косинус кута між цими прямими.

571. Визначити взаємне розташування прямих l_1 і l_2 , заданих в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ рівняннями:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases} & \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -t; \end{cases} & \begin{cases} x = -2t, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 4; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x + z - 8 = 0, \end{cases} & \begin{cases} z - 4 = 0, \\ 2x + 3z - 7 = 0; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t, \end{cases} & \begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -1 - 2t, \end{cases} & \begin{cases} x = -1 + 6t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + 4t, \end{cases} \\
 6) \quad & \begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0, \end{cases} & \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

572. Написати рівняння прямої, що лежить в площині, яка задана в афінному репері рівнянням $y + 2z = 0$, і перетинає прямі l_1 і l_2 , рівняння яких:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = 4t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 4 + 2t, \\ z = 1. \end{cases}$$

573. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; 3; 1)$ і перетинає прямі l_1 і l_2 , що задані в афінному репері рівняннями:

$$l_1 : \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

574. Довести, що прямі l_1 і l_2 , які задані в афінному репері рівняннями

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 11t, \\ y = -1 - 5t, \\ z = 1 - 7t; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z - 7 = 0, \\ x - 2y + 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

паралельні ($l_1 \neq l_2$), і написати рівняння прямої l , що проходить посередині між l_1 і l_2 .

575. Написати рівняння прямої, яка містить висоту AH трикутника ABC , якщо $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 6; -2)$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

576. Довести, що прямі l_1 і l_2 , задані в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2t; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases}$$

перетинаються, і написати рівняння прямої, яка містить бісектрису гострих кутів, утворених прямими l_1, l_2 .

577. Знайти рівняння спільного перпендикуляра мимобіжних прямих l_1, l_2 , заданих в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями:

$$l_1 : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

578. Написати рівняння прямої, яка містить бісектрису AD внутрішнього кута трикутника ABC , якщо в ортонормованому репері дані вершини $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; 3; -5)$.

579. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дані рівняння прямої l :

$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -3t$$

і площини $\Pi : 2x + 2y - z - 5 = 0$. Написати рівняння прямої l' , яка проходить через точку $M_1(5; 1; -2)$, паралельно площині Π і перетинає пряму l .

580. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l , яка задана рівняннями: $x = 1 - 2t$, $y = 3 + t$, $z = 3t$, на площину

$$\Pi : x - y - z - 5 = 0 \quad (R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})).$$

581. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямої l :

$$x = 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t$$

і площини $\Pi : x + y + z - 10 = 0$. Написати рівняння прямої $l' \subset \Pi$, перпендикулярної до прямої l і яка проходить через точку $M = \Pi \cap l$.

582. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямих

$$l_1 : x = 2 + 4t, \quad y = -1 + t, \quad z = 1 - t;$$

$$l_2 : x = -4 + 2t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = -2 - 3t.$$

Довести, що прямі l_1, l_2 мимобіжні. Знайти рівняння площини Π , паралельної прямим l_1, l_2 і яка однаково віддалена від них.

583. Довести, що прямі l_1 , l_2 , які задані в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями

$$l_1 : x - y - 3z = 0, \quad x - 2y + z = 0;$$

$$l_2 : x = 1 + 4t, \quad y = -2 + 7t, \quad z = 1 - t,$$

перетинаються, точка $M_0(2; -1; 1)$ є внутрішньою точкою одного з кутів, утворених прямими l_1 , l_2 , і написати рівняння прямої, яка містить бісектрису цього кута.

584. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані точки: $A(5; -3; 2)$, $B(2; -1; 0)$, $C(-1; 2; -2)$, $D(2; 4; -5)$. Написати рівняння спільного перпендикуляра до прямих AB і CD .

585. Знайти рівняння площини Π , яка проходить через пряму l , що задана в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ рівняннями:

$$2x - y - 3z - 5 = 0, \quad x + y - z + 1 = 0$$

і паралельна вектору $\vec{a}(1; 3; -2)$.

5.6 Задачі на площину і пряму в просторі

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

586. Довести, що пряма $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ паралельна площині $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

587. Довести, що пряма $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежить в площині $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

588. Згайти точку перетину прямої і площини:

$$1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$2) \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$$

$$3) \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$$

589. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -4; -1)$ і середину відрізка прямої

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

який знаходиться між площинами

$$5x + 3y - 4z + 11 = 0, \quad 5x + 3y - 4z - 41 = 0.$$

590. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно до площини $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

591. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно до прямої

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

592. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

593. При якому значенні m пряма $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x - 3y + 6z + 7 = 0$.

594. При якому значенні C пряма $\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ паралельна площині $2x - y + Cz - 2 = 0$?

595. При яких значеннях A і D пряма $x = 3 + 4t, y = 1 - 4t, z = -3 + t$ лежить в площині $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

596. При яких значеннях A і B площина $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна до прямої $x = 3 + 2t, y = 5 - 3t, z = -2 - 2t$?

597. При яких значеннях l і C пряма $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?
598. Знайти проекцію точки $P(2; -1; 3)$ на пряму $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.
599. Знайти точку Q , симетричну точці $P(4; 1; 6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

600. Знайти точку Q , симетричну точці $P(2; -5; 7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5; 4; 6)$ і $M_2(-2; -17; -8)$.
601. Знайти проекцію точки $P(5; 2; -1)$ на площину, рівняння якої $2x - y + 3z + 23 = 0$.
602. Знайти точку Q , симетричну точці $P(1; 3; -4)$ відносно площини $3x + y - 2z = 0$.
603. На площині Oxy знайти таку точку P , сума відстаней яких до точок $A(-1; 2; 5)$ і $B(11; -16; 10)$ була б найменшою.
604. На площині Oxz знайти таку точку P , різниця відстаней яких до точок $M_1(3; 2; -5)$ і $M_2(8; -4; -13)$ була б найбільшою.
605. На площині $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ знайти таку точку P , сума відстаней яких до точок $A(3; -4; 7)$ і $B(-5; -14; 17)$ була б найменшою.
606. На площині $2x + 3y - 4z - 15 = 0$ знайти таку точку P , різниця відстаней яких до точок $M_1(5; 2; -7)$ і $M_2(7; -25; 10)$ була б найбільшою.
607. Обчислити відстань d точки $P(1; -1; -2)$ від прямої

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

608. Обчислити відстань d від точки $P(2; 3; -1)$ до наступних прямих:

$$1) \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2};$$

$$2) \quad x = t + 1, \quad y = t + 2, \quad z = 4t + 13;$$

$$3) \quad \begin{cases} 2x - 2y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$$

609. Переконавшись, що прямі

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0; \end{cases} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

паралельні, обчислити відстань між ними.

610. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; 2; -3)$ паралельно прямим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

611. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x = 2t + 1, y = -3t + 2, z = 2t - 3$ і точку $M_1(2; -2; 1)$.

612. Довести, що прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}; \quad \begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини.

613. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні площини

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

614. Знайти проекцію точки $C(3; -4; -2)$ на площину, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \quad \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

615. Знайти точку Q , симетричну точці $P(3; -4; -6)$ відносно площини, що проходить через точки $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ і $M_3(10; -7; 1)$.

616. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-3; 2; 5)$ відносно площини, що проходить через прямі

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

617. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$x = 3t + 1, \quad y = 2t + 3, \quad z = -t - 2 \text{ паралельно прямій}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

618. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

перпендикулярно до площини $3x + 2y - z - 5 = 0$.

619. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає

$$\text{пряму } \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

620. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить паралельно площинам

$$3x + 12y - 3z - 5 = 0, \quad 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

і перетинає прямі

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

621. Обчислити найкоротшу відстань між двома прямими в кожному з наступних випадків:

$$1) \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}; \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1};$$

$$2) \quad \begin{cases} x = 2t - 4, \\ y = -t + 4, \\ z = -2t - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4t - 5, \\ y = -3t + 5, \\ z = -5t + 5; \end{cases}$$

$$3) \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad \begin{cases} x = 6t + 9, \\ y = -2t, \\ z = -t + 2. \end{cases}$$

622. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямої l :

$$2x - y - z - 5 = 0, \quad x + y - 2z + 3 = 0$$

і площини $\Pi: x - 3y + z - 1 = 0$. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l на площину Π .

5.7 Задачі на сферу

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

623. Скласти рівняння сфери в кожному з наступних випадків:

- 1) сфера має центр $C(0; 0; 0)$ і радіус $r = 9$;
- 2) сфера має центр $C(5; -3; 7)$ і радіус $r = 2$;
- 3) сфера проходить через початок координат і має центр $C(4; -4; -2)$;
- 4) сфера проходить через точку $A(2; -1; -3)$ і має центр $C(3; -2; 1)$;
- 5) точки $A(2; -3; 5)$ і $B(4; 1; -3)$ є кінцями одного з діаметрів сфери;
- 6) центром сфери є початок координат, і площина $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ дотикається до сфери;

- 7) сфера має центр $C(3; -5; -2)$ і площина $2x - y - 3z + 11 = 0$ дотикається до сфери;
- 8) сфера проходить через три точки $M_1(3; 1; -3)$, $M_2(-2; 4; 1)$ і $M_3(-5; 0; 0)$, а центр лежить на площині $2x + y - z + 3 = 0$;
- 9) сфера проходить через чотири точки: $M_1(1; -2; -1)$, $M_2(-5; 10; -1)$, $M_3(4; 1; 11)$, $M_4(-8; -2; 2)$.

624. Скласти рівняння сфери радіуса $r = 3$, яка дотикається площини $x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точці $M_1(1; 1; -3)$.

625. Обчислити радіус R сфери, яка дотикається площин

$$3x + 2y - 6z - 15 = 0, \quad 3x + 2y - 6z + 55 = 0.$$

626. Сфера, центр якої лежить на прямій $\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ дотикається площин $x + 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Скласти рівняння цієї сфери.

627. Скласти рівняння сфери, яка дотикається двох паралельних площин

$$6x - 3y - 2z - 35 = 0, \quad 6x - 3y - 2z + 63 = 0,$$

причому однієї з них в точці $M_1(5; -1; -1)$.

628. Скласти рівняння сфери з центром $C(2; 3; -1)$, яка відтинає від прямої

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

хорду, яка має довжину, рівну 16.

629. Визначити координати центра C і радіус r сфери, яка задана одним з наступних рівнянь:

1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$;

$$3) x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0;$$

$$4) x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0;$$

$$5) x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0.$$

630. Скласти параметричні рівняння діаметра сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0,$$

перпендикулярного до площини $5x - y + 2z - 17 = 0$.

631. Скласти канонічні рівняння діаметра сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0,$$

паралельного прямій $x = 2t - 1$, $y = -3t + 5$, $z = 4t + 7$.

632. Обчислити найкоротшу відстань від точки A до даної сфери в таких випадках:

$$а) A(-2; 6; -3), \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4;$$

$$б) A(9; -4; -3), \quad x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 16y - 24z + 241 = 0;$$

$$в) A(1; -1; 3), \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0.$$

633. Визначити, як розташована площина відносно сфери — чи перетинає, дотикається або проходить поза нею; площина і сфера задані наступними рівняннями:

$$1) z = 3, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0;$$

$$2) y = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0;$$

$$3) x = 5, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0.$$

634. Визначити, як розташована площина відносно сфери — чи перетинає, дотикається або проходить поза нею; площина і сфера задані наступними рівняннями:

$$1) \begin{cases} x = -2t + 2, \\ y = 3t - \frac{7}{2}, \\ z = t - 2, \end{cases} \quad x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0;$$

$$2) \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0;$$

$$3) \begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0, \\ 2x - 4y - z + 6 = 0, \end{cases} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0.$$

635. На сфері $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ знайти точку M_1 , найближчу до площини $3x - 4z + 59 = 0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї площини.

636. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точці $M_1(6; -3; -2)$.

637. Довести, що площина $2x - 6y + 3z - 49$ дотикається сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Обчислити координати точки дотикання.

638. Скласти рівняння дотичної площини до сфери

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$$

в точці $M_1(-1; 3; 0)$.

639. Через точки перетину прямої $x = 3t - 5$, $y = 5t - 11$, $z = -4t + 9$ і сфери $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49$ проведені дотичні площини до цієї сфери. Скласти їх рівняння.

640. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ і паралельних площині $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

641. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

і паралельних площині $4x + 3z - 17 = 0$.

642. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$$

і паралельних прямих

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}, \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{0}.$$

643. Довести, що через пряму $\frac{x+6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{1}$ неможливо провести площину, дотичну до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0.$$

644. Довести, що через пряму $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ можна провести тільки одну площину, дотичну до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0,$$

і скласти її рівняння.

645. Написати рівняння сфери, яка дотикається площини

$$\Pi: 3x - 6y - 2z + 14 = 0$$

в точці $(2, 1, 7)$, якщо її радіус дорівнює 7.

646. Знайти рівняння сфери радіуса $r = 6$, що дотикається площини $\Pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$ в точці $M_0(3; 0; 2)$ і розташована по один бік з точкою $P(0; 1; 2)$ відносно Π .

647. Написати рівняння сфери, яка лежить в гострому куті, утвореному площинами $2x - 4y - 3z + 21 = 0$, $5x - 2z = 0$, і дотикається цих площин, якщо її центр лежить на осі абсцис.

648. Написати рівняння площини, паралельної площині, заданої рівнянням $2x + y - 4z + 5 = 0$ і яка дотикається до сфери, заданої рівнянням $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 21$.

649. Написати рівняння сфери, вписаної в тетраедр, утворений координатними площинами і площиною $x + 2y - 2z + 8 = 0$.

650. Довести, що сфери Φ_1 і Φ_2 , які задані рівняннями

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 14 = 0,$$

перетинаються, і знайти рівняння площини $\Pi \supset \gamma$, $\gamma = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

6 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1 Поверхні обертання

651. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи

$$z^2 = 10y, \quad x = 0 \text{ навколо осі } Oz.$$

652. Парабола з параметром $p = 5$ розташована на площині Oyz так, що директриса співпадає з віссю Oz . Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням даної параболи навколо осі Oz .

653. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy кожної з наступних кривих, розташованих в площині Oxy :

а) еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

в) гіперболи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$;

г) параболи $x^2 = 2py$.

654. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі Oz .

655. Довести, що поверхні, задані кожним з наступних рівнянь, є поверхнями обертання. Знайти твірні криві та вісі обертання:

а) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2 + z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

656. Довести, що поверхня, визначена рівнянням

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 21)^2 = 100(x^2 + y^2)$$

є поверхнею обертання. Визначити її переріз з площиною Oxy .

657. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0 \text{ навколо осі } Ox.$$

658. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0 \text{ навколо осі } Oz.$$

6.2 Циліндричні і конічні поверхні

659. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її вісі: $x = 7 + 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 + 2t$ і координати однієї з її точок $M_0(2, -1, 0)$.

660. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її вісі: $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$ і координати однієї з її точок $M_0(1, -2, 1)$.

661. Скласти рівняння циліндричної поверхні в кожному з наступних випадків:

а) напрямна лежить в площині Oxy і має рівняння

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0, \text{ а твірні паралельні вектору } \vec{s}(1, 0, 1);$$

б) напрямна лежить в площині Oyz і має рівняння

$$y^2 - yz + 5 = 0, \text{ а твірні паралельні осі } Ox;$$

в) напрямна лежить в площині Oxy і має рівняння

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, \text{ а твірні паралельні вектору } \vec{p}(1, 2, -1);$$

г) напрямна лежить в площині Oxz і є колом $(x-1)^2 + z^2 = 4$, а твірні паралельні осі Oy .

662. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання співпадає з віссю Oz , а радіус $r = 5$.

663. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання проходить через початок координат і паралельна вектору $\vec{a}(0, -1, 1)$, а $r = 3$.

664. Написати рівняння конічної поверхні, якщо:

а) пряма в площині Oxy задана рівнянням $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина має координати $S(1, 0, 1)$;

б) пряма в площині Oxy задана рівнянням $x^2 + y^2 = 16$, а вершина має координати $S(0, 0, 1)$.

665. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(1, 2, 4)$, твірні якої утворюють з площиною $2x + 2y + z = 0$ кут $\varphi = 45^\circ$.

666. Скласти рівняння кругової конічної поверхні, вершина якої знаходиться в точці $S(1, 2, 3)$, вісь перпендикулярна до площини $2x + 2y - z + 1 = 0$, а твірні утворюють з віссю кут, рівний $\varphi = 30^\circ$.

667. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, пряма якого задана рівняннями $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$.

668. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $S(3, -1, -2)$, а пряма задана рівняннями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

669. Вісь Oz є віссю кругового конуса з вершиною в початку координат, точка $M_1(3, -4, 7)$ лежить на його поверхні. Скласти рівняння цього конуса.

670. Пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ є вісь кругового конуса, вершина якого лежить на площині Oyz . Скласти рівняння цього конуса, знаючи, що точка $M_1\left(1, 1, -\frac{5}{2}\right)$ лежить на його поверхні.

671. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, твірні якого дотикаються сфери $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.

672. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $S(3, 0, -1)$, твірні якого дотикаються еліпсоїда $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$.

673. Скласти рівняння циліндра, твірні якого паралельні вектору $\vec{l}(2, -3, 4)$, а напрямна задана рівняннями $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$.
674. Скласти рівняння циліндра, напрямна якого задана рівняннями $x^2 - y^2 = z$, $x + y + z = 0$, а твірні перпендикулярні до площини напрямної.
675. Написати рівняння циліндра другого порядку, який проходить через точки $M_1(1, 0, -1)$, $M_2(2, 0, 2)$, якщо площини

$$\Pi_1: x + 2y + z = 0, \quad \Pi_2: x - z = 0$$

є площинами симетрії циліндра, а пряма $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$ — віссю симетрії.

676. Написати рівняння конуса обертання, який проходить через прямі:

$$l_1: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2t, \\ z = -1 + 2t; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = t, \\ z = -1 + 2t; \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2t, \\ z = -1 - 2t. \end{cases}$$

677. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, знаючи рівняння трьох його твірних:

$$l_1: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t; \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = t, \\ z = 1 + t; \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

678. Написати рівняння циліндра обертання, що проходить через точку $M_0(1, -2, 1)$, віссю якого є пряма:

$$x = t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -3 - 2t.$$

679. Параболічний циліндр проходить через точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(1, -1, 1)$, його твірні паралельні прямій: $x = t$, $y = t$, $z = -2t$, а площина $x + y + z = 0$ є його площиною симетрії. Написати рівняння цього циліндра.

680. Написати рівняння циліндра, знаючи напрямний вектор $\vec{a}(5, 3, -2)$ його твірних і рівняння його напрямної:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 - z^2 = 4, \\ x = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0. \end{cases}$$

681. Написати рівняння циліндричної поверхні, твірні якої дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і утворюють рівні кути з осями координат.

682. Написати рівняння конуса, описаного навколо сфер:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

683. Конус заданий рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0, -2, 2)$, $M_2(-1, 0, 0)$ і перетинає даний конус по параболі.

684. Написати рівняння конуса з вершиною $S(1, 0, -1)$, що проходить через лінію:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

685. Напрямна конуса задана рівняннями:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

а вершина знаходиться в точці $S(-3, 0, 0)$. Скласти рівняння конуса.

686. Скласти рівняння циліндра, напрямною якого є коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$ і напрямок твірної заданий вектором $\vec{s}(5, 3, 2)$.

687. Знайти рівняння циліндра, знаючи, що він проходить через криву

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

а твірна його: 1) паралельна осі Ox ; 2) паралельна прямій $x = y$, $z = c$.

688. Напрямна циліндра задана рівняннями: $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ а твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Скласти рівняння циліндра.

6.3 Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди

689. Написати рівняння еліпсоїда, вісі якого співпадають з вісями координат і який:

- а) проходить через точку $M(2, 0, 1)$ і перетинає площину Oxy по еліпсу $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$;
- б) проходить через точку $N(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ і перетинає площину Oyz по еліпсу $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} = 1$;
- в) перетинає площину Oyz по еліпсу $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{2} = 1$, а площину Oxy — по колу $x^2 + y^2 = 25$.

690. Написати канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня:

- а) проходить через точку $A(\sqrt{5}, 3, 2)$ і перетинає площину Oxz по гіперболі $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1$;
- б) перетинає площину Oxy по колу $x^2 + y^2 = 9$, а площину Oxz — по гіперболі $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$.

691. Знайти переріз еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ координатними площинами прямокутної декартової системи координат.

692. Знайти проекцію на площину Oxy лінії перерізу однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ з площиною $x = 2z$.

693. Дослідити методом перерізів наступні поверхні другого порядку:

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$;

б) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$;

г) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

д) $x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0$.

694. Знайти рівняння проєкцій на координатні площини перерізу еліптичного параболоїда $y^2 + z^2 = x$ площиною $x + 2y - z = 0$.

695. Встановити, яка лінія є перерізом еліпсоїда $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ площиною $2x - 3y + 4z - 11 = 0$, і знайти її центр.

696. Встановити, яка лінія є перерізом гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$ площиною $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, і знайти її центр.

697. Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ має одну спільну точку з площиною $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ і знайти її координати.

698. Визначити, при якому значенні m площина $x - 2y - 2z + m = 0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$.

699. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}(2, -1, -2)$ і дотикається еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$.

700. Провести дотичні площини до еліпсоїда $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ паралельно площині $x - 2y + 2z + 17 = 0$, обчислити відстань між знайденими площинами.

701. Переконавшись, що точка $M(1, 3, -1)$ лежить на гіперболчному параболоїді $4x^2 - z^2 = y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, що проходять через M .

702. Скласти рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, паралельних площині $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.
703. Вісі симетрії еліпсоїда є вісями ортонормованого репера. Написати рівняння цього еліпсоїда, якщо він проходить через еліпс: $z = 0$, $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} = 1$ і точку $M(3, 2, 5)$.
704. Написати рівняння еліпсоїда з піввісями $|O'A_1| = 4$, $|O'B_1| = 2$, $|O'C_1| = 1$, якщо відомі рівняння його площин симетрії $\Pi_1: x + y + z - 1 = 0$, $\Pi_2: x + y - 2z = 0$, $\Pi_3: x - y + 1 = 0$ і $O'B_1 = \Pi_1 \cap \Pi_3$, $O'C_1 = \Pi_2 \cap \Pi_3$.
705. Дані вершини еліпсоїда $A_1(8, 0, 0)$, $A_2(-2, 0, 0)$. Написати рівняння цього еліпсоїда, знаючи, що площина Oyz перетинає його по еліпсу: $x = 0$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
706. Дані рівняння еліпсоїда $\Phi: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$, прямої $l: \begin{cases} 2x - y = 0, \\ z - 9 = 0 \end{cases}$ і точка $M_0(-3, 1, 1)$. Написати рівняння тієї дотичної площини до еліпсоїда Φ , яка проходить через пряму l і не перетинає відрізок OM_0 .
707. Вісі симетрії однопорожнинного гіперболоїда Φ слугують вісями ортонормованого репера і Φ проходить через еліпс $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ і гіперболу $\gamma_2: \begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{5} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$. Написати рівняння гіперболоїда Φ .
708. Вісі симетрії однопорожнинного гіперболоїда слугують вісями ортонормованого репера. Написати рівняння цього гіперболоїда,

якщо він проходить через лінію $\begin{cases} 25x^2 - 16z^2 = 144, \\ x = y \end{cases}$ і точку $M_0(3, 4, 3)$.

709. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

які проходять через точку $M_0(5, 3, 2)$.

710. Написати рівняння площини, яка паралельна даній площині $\Pi: x - y + z - 5 = 0$ і перетинає параболоїд $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$ по двом прямолінійним твірним. Знайти рівняння цих твірних.

711. Знайти рівняння прямолінійних твірних параболоїда

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z,$$

паралельних площині $6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

712. Написати рівняння площини, яка дотикається поверхні

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$$

в точці $M_0(-6, 2, 6)$.

713. В точці $M_0\left(-2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ провести нормаль до еліпсоїда

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

714. Знайти дотичні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, які були б паралельні площині $2x + 2y - 3z = 0$.

715. Знайти дотичні площини параболоїда $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$, які були б паралельні площині $x - y - 2z = 0$.

716. Знайти площину, яка дотикається конуса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 0$ в точці $M_0(4, -6, 4)$.

717. До однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ провести дотичні площини через кожну з наступних прямих: 1) $\frac{x}{3} = \frac{y+9}{3} = \frac{z}{1}$; 2) $\frac{x-9}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$; 3) $\frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$ і дослідити, як ці прямі розташовані відносно гіперболоїда.

6.4 Загальна теорія поверхонь другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Коефіцієнти a_{ij} залежать від вибору системи координат. Однією з основних задач теорії поверхонь другого порядку є спрощення загального рівняння (1) шляхом належного підбору нової системи координат. Спрощення рівняння (1), так як і у випадку кривої другого порядку, проводиться у два етапи.

а) *Спрощення рівняння поверхні шляхом повороту системи координат.* Якщо поверхня задана в прямокутній декартовій системі $Oxyz$ рівнянням (1), то завжди існує така нова прямокутна декартова система, отримана з вихідної шляхом повороту системи, в якій поверхня має рівняння, що не містить добутоків змінних. Напрямки осей цієї системи називаються *головними напрямками* поверхні другого порядку.

Для знаходження головних напрямків спочатку складають *характеристичне рівняння поверхні*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Корені s_1 , s_2 і s_3 характеристичного рівняння завжди дійсні числа, і кожному кореню відповідає головний напрямок. Якщо s_k — корінь рівняння (2), то координати вектора головного напрямку, який відповідає кореню s_k , визначається з системи рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - s_k)p_k^1 + a_{12}p_k^2 + a_{13}p_k^3 = 0, \\ a_{21}p_k^1 + (a_{22} - s_k)p_k^2 + a_{23}p_k^3 = 0, \\ a_{31}p_k^1 + a_{32}p_k^2 + (a_{33} - s_k)p_k^3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Визначивши координати одиничних векторів $\vec{i}'(p_1^1, p_1^2, p_1^3)$, $\vec{j}'(p_2^1, p_2^2, p_2^3)$, $\vec{k}'(p_3^1, p_3^2, p_3^3)$, які мають головні напрямки, легко записати формули перетворення при переході від вихідної системи до нової. Рівняння даної поверхні в новій системі $Ox'y'z'$ в загальному виді запишеться так:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + s_3z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0, \quad (4)$$

де $a'_{l4} = a_{14}p_l^1 + a_{24}p_l^2 + a_{34}p_l^3$ ($l = 1, 2, 3$).

б) *Спрощення рівняння поверхні шляхом переміщення початку координат*. Подальше спрощення рівняння (4) проводиться за допомогою переміщення початку координат. Шляхом належного підбору нового початку рівняння (4) можна звести до одного з наступних видів:

$$s_1\tilde{x}^2 + s_2\tilde{y}^2 + s_3\tilde{z}^2 + a'_{33} = 0;$$

$$s_1\tilde{x}^2 + s_2\tilde{y}^2 = 2a'_{14}\tilde{z}.$$

Користуючись цими співвідношеннями, можна дати повну класифікацію поверхонь другого порядку. Існують 17 типів поверхонь другого порядку, перелік яких з відповідними канонічними рівняннями даний в таблиці на сторінці 97.

Нехай поверхня другого порядку задана рівнянням (1), а пряма — параметричними рівняннями:

$$x = p_1 t + x_1, \quad y = p_2 t + x_2, \quad z = p_3 t + x_3. \quad (5)$$

Тут $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ — напрямний вектор, а $M_0(x_1, x_2, x_3)$ — початкова точка.

№	Назва поверхні	Канонічне рівняння
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	Уявний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
3	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4	Двохпорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
5	Дійсний конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
6	Уявний конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
7	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; \quad p > 0, \quad q > 0$
8	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z; \quad p > 0, \quad q > 0$
9	Дійсний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
10	Уявний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
11	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

№	Назва поверхні	Канонічне рівняння
12	Дві дійсні площини, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
13	Дві уявні площини, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
14	Параболічний циліндр	$x^2 = \pm 2py$
15	Дві дійсні паралельні площини	$x^2 - a^2 = 0$
16	Дві уявні паралельні площини	$x^2 + a^2 = 0$
17	Дві співпавші площини	$x^2 = 0$

Для знаходження параметрів точок перетину необхідно підставити значення x , y і z з (5) в співвідношення (1). Після елементарних перетворень отримуємо:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (6)$$

де

$$P = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha, \beta} p_{\alpha} p_{\beta}, \quad Q = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha, \beta} p_{\alpha} x_{\beta}, \quad R = \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

де $\Phi(x, y, z)$ — ліва частина рівняння (1).

Прямі, напрямні вектори яких задовольняють умову $P = 0$, називаються *прямими асимптотичного напрямку* по відношенню до даної поверхні, а напрямні вектори цих прямих — *векторами асимптотичного напрямку* або *асимптотичними векторами*. *Конусом асимптотичних напрямків* даної поверхні, називається конічна поверхня з вершиною в довільній точці простору, всі твірні якої мають асимптотичний напрямок.

Так як і у випадку кривої, число точок перетину поверхні (1) з прямою (5) визначається числом різних коренів рівняння (6).

Якщо пряма не має асимптотичного напрямку по відношенню до поверхні, то вона перетинається з нею в двох точках:

- а) дійсних і різних, якщо $Q^2 - PR > 0$,
- б) комплексно спряжених, якщо $Q^2 - PR < 0$,
- в) співпалих, якщо $Q^2 - PR = 0$. В цьому випадку кажуть, що пряма *дотикається* поверхні.

Якщо пряма має асимптотичний напрямок по відношенню до поверхні, то вона або перетинається з нею в одній точці ($P = 0, Q \neq 0$), або не має з нею жодної спільної точки ($P = Q = 0, R \neq 0$), або належить поверхні ($P = Q = R = 0$).

Асимптотою поверхні другого порядку називається кожна пряма, яка не має жодної спільної точки (ні дійсної, ні комплексної!) з поверхнею.

Прямолінійною твірною називається пряма, що цілком належить поверхні.

Геометричне місце середин всіх хорд поверхні (1), паралельних вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ неасимптотичного напрямку, є площина, яка задана рівнянням:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + p_3(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \quad (7)$$

Ця площина називається *діаметральною площиною, відповідною або спряженою вектору $\vec{p}$* .

Точка C простору називається *центром поверхні другого порядку*, якщо поверхня симетрична відносно C . Для того щоб точка $C(x_0, y_0, z_0)$ була центром поверхні (1), необхідно і достатньо, щоб її координати задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Поверхні, які мають тільки один центр називаються *центральними*, а інші поверхні — *нецентральними*. Нецентральні поверхні або не мають жодного центра, або мають пряму або площину центрів.

Якщо координати двох ненульових векторів $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ і $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ задовольняють умову:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha, \beta} p_{\alpha} q_{\beta} = 0,$$

то вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ називаються *спряженими відносно поверхні* (1).

Напрямок ненульового вектора $\vec{p}$ називається *головним відносно даної поверхні*, якщо будь-який вектор, що перпендикулярний йому, спряжений з ним.

Якщо поверхня задана в прямокутній декартовій системі рівнянь (1), то головні напрямки визначаються з системи (3), де s_k — корінь характеристичного рівняння (2).

Кожна поверхня другого порядку має принаймні три взаємно перпендикулярних напрямки. Вісі координат мають головні напрямки¹ тоді і тільки тоді, коли

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Діаметральна площина поверхні другого порядку називається *головною*, якщо вона перпендикулярна відповідним хордам. Для визначення головних діаметральних площин можна скористатись наступною теоремою: *для того щоб діаметральна площина була головною, необхідно і достатньо, щоб відповідний вектор був вектором головного, але не асимптотичного напрямку.*

6.4.1 Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду

За допомогою перетворення обертання прямокутної декартової системи координат звести до канонічного виду наступні рівняння поверхонь другого порядку і написати формули перетворення.

718. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 36 = 0.$

719. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 24 = 0.$

¹ Див. означення головних напрямків, яке дане на сторінці 95.

$$720. 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 15 = 0.$$

$$721. 3x^2 + 2y - 4z = 0.$$

$$722. x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 12 = 0.$$

$$723. x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 24 = 0.$$

$$724. x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz - 6 = 0.$$

$$725. 5x^2 + 5y^2 - 3z^2 - 8y - 9 = 0.$$

$$726. 5y^2 + 4x^2 + 6z = 0.$$

$$727. x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz - yz = 3.$$

$$728. \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 - 3xy - xz + yz - 6 = 0.$$

$$729. x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 4.$$

За допомогою переміщення початку прямокутної декартової системи координат звести до канонічного виду наступні рівняння поверхонь другого порядку.

$$730. x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 2x + 12y + 4z + 9 = 0.$$

$$731. 3x^2 - 2z^2 + 12x - 2y + 4z + 6 = 0.$$

$$732. y^2 + 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0.$$

$$733. 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0.$$

$$734. x^2 + 2z^2 - 6x + 4y + 12y - 12z + 1 = 0.$$

$$735. 2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 12z + 2 = 0.$$

$$736. x^2 - 2z^2 + 6x + 4y - 4z + 3 = 0.$$

$$737. x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$$

$$738. x^2 - 3y^2 + 10x + 12y + 13 = 0.$$

$$739. 5x^2 + 10y + 2z^2 - 40y + 50 = 0.$$

$$740. x^2 + 14y + 44 = 0.$$

За допомогою перетворення обертання системи координат та переміщення початку координат звести до канонічного виду рівняння наступних поверхонь другого порядку.

$$741. 5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0.$$

$$742. x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 8x + 4y - 5 = 0.$$

$$743. 2xz + 4x - 6y + 8z - 2 = 0.$$

$$744. 6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 25 = 0.$$

$$745. 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 36x + 36y - 18z - 18 = 0.$$

$$746. 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$$

$$747. 5y^2 - 2x + 10y - 4z + 1 = 0.$$

$$748. 3x^2 + 2yz - 6x + 4y - 4z + 1 = 0.$$

$$749. 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 8xz + 4x - 6y + 8z - \frac{35}{3} = 0.$$

6.4.2 Перетин поверхні з прямою, асимптотичні напрямки

$$750. \text{Визначити точки перетину поверхні другого порядку } x^2 - 2xy + 2z^2 + xz - x - y = 0 \text{ з прямою } \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{4}.$$

$$751. \text{Дана поверхня другого порядку: } x^2 - 3xy + xz + y^2 - x - 2y + 1 = 0. \text{ Вияснити, які з векторів } \vec{a}(1, 0, 0), \vec{b}(2, 2, 2), \vec{c}(1, 2, 0), \vec{d}(0, 0, 5) \text{ мають асимптотичні напрямки по відношенню до даної поверхні.}$$

$$752. \text{Знайти ті прямолінійні твірні поверхні } x^2 + y^2 - z^2 = 1, \text{ які проходять через точку } M(1, 1, 1).$$

753. Знайти ті прямолінійні твірні поверхні

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0,$$

які проходять через точку $N(-1, -1, 1)$.

754. Знайти точки перетину поверхні і прямої:

$$1) \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4};$$

$$2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4};$$

$$3) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2};$$

$$4) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z \quad \text{і} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

6.4.3 Діаметральні площини, центр, головні напрямки

755. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 6yz - 2x + 4y - 5 = 0,$$

яка спряжена напрямку прямої: $\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

756. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$6x^2 + 9y^2 + z^2 - 6xy - 4xz - 2y - 3 = 0,$$

яка паралельна площині $x + 3y - z + 5 = 0$.

757. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 4xz - 5 = 0,$$

яка проходить через пряму $x = 1 - 3t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$.

758. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$, яка проходить через пряму $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = t$.

759. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, яка проходить через точки $O(0, 0, 0)$ і $M(1, 1, 0)$.

760. Знайти спільну діаметральну площину наступних поверхонь:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0,$$

$$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0.$$

761. Знайти спільну діаметральну площину поверхонь:

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0,$$

$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6xz + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0.$$

762. Скласти рівняння діаметральної площини поверхні $x^2 - xy + 2yz + x - z = 0$, що проходить через точку $(1, 1, 1)$ і спряжена напрямку вектора $\vec{a}$, паралельного площині Oxy .

763. Знайти центри наступних поверхонь другого порядку:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$;

в) $2x^2 + 12y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz + 12yz - 10x + 14z + 7 = 0$.

764. Знайти геометричне місце центрів і визначити тип кожної з наступних поверхонь другого порядку:

а) $9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12y - 36z = 0$;

б) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y - 8z - 1 = 0$;

в) $x^2 + 4y^2 + 4xz - 2yz = 0$;

г) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 5x + 5y - 5z + 2 = 0$.

765. Знайти рівняння головних діаметральних площин і осей наступних поверхонь другого порядку:

- а) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 4x + 6y + 2z - 8 = 0$;
 б) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 8y + 6z - 10 = 0$;
 в) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 6x + 6y - 7 = 0$;
 г) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 6xz + 6yz - 4x + 4y - 2z - 12 = 0$;
 д) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = 0$.

766. Знайти діаметральну площину поверхні $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6xz + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0$, спряжену хордам, паралельним:

1) прямій $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$; 2) осі Ox ; 3) осі Oy ; 4) осі Oz .

767. Знайти діаметр поверхні $x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6xz + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0$, який проходить через початок координат, і скласти рівняння спряженої йому діаметральної площини.

768. Дана поверхня $6x^2 + 9y^2 + z^2 - 4xz + 6xy = 2y - 3 = 0$. Знайти діаметральну площину, паралельну площині $x + 3y - z + 5 = 0$, і скласти рівняння спряженого йому діаметра.

769. Знайти ту діаметральну площину поверхні $x^2 + 3z^2 - 6xy + 8x + 5 = 0$, яка проходить через пряму $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{3}$.

770. Знайти спільну діаметральну площину трьох поверхонь:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 11 = 0;$$

$$3y^2 + 4xy - 8xz + 6z + 5 = 0;$$

$$8x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 4xy - 9xz - 15 = 0.$$

771. Знайти головні напрямки поверхні $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

772. Знайти головні вісі поверхні $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$.

773. Знайти головні діаметральні площини поверхні $x^2 + y^2 - 3z^2 - 6yz - 6xz - 2xy + 2x + 2y + 4z = 0$.

7 ВІДПОВІДІ

- 7.** $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. **8.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. **9.** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. **10.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11.4$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. **11.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19} \approx 4.4$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. **12.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **17.** 1) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 3) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$; 4) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$; 5) $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$; 6) $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$. **20.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, або $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, де O — довільна точка або $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. **32.** 1) $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{k+1}, -\frac{1}{k+1}\right)$. **33.** $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$, де $b = |AC|$, $c = |AB|$. **34.** $\overrightarrow{AB} (2, 1)$, $\overrightarrow{BC} (-1, 1)$, $\overrightarrow{AC} (1, 2)$, $\overrightarrow{AM} (1, 1)$. **36.** $\overrightarrow{AC} (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AD} (1, 1)$, $\overrightarrow{AF} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{EF} (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **37.** $\overrightarrow{AB} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BC} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{CD} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DA} (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **38.** а) $\overrightarrow{CM} (-1, 1)$, $\overrightarrow{OB} (-1, -2)$, $\overrightarrow{KM} (-1, -1)$, $\overrightarrow{CB} (-2, -2)$, $\overrightarrow{NC} (1, 1)$, $\overrightarrow{AN} (-1, -5)$; б) $\overrightarrow{CM} (2, 1)$, $\overrightarrow{OB} (-\frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{KM} (-1, 1)$, $\overrightarrow{CB} (-2, 2)$, $\overrightarrow{NC} (1, -1)$, $\overrightarrow{AN} (1, 1)$. **39.** $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a} \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AC} = \frac{a-b}{a} \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, де $a = AB$, $b = AD$. *Вказівка.* Попередньо довести, що якщо AB — більша основа трапеції, а CD — менша, то $\overrightarrow{CD} = \frac{b-a}{a} \vec{e}_1$. **40.** $(0, -1, -1)$. **41.** $\vec{m} = 2\vec{n} - \vec{p}$. **47.** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. **48.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **49.** $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. **50.** $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. **51.** 1) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$; 2) $(4, 5)$. **54.** $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$. **56.** 1) -6 ; 2) 9 ; 3) 16 ; 4) 13 ; 5) -61 ; 6) 37 ; 7) 73 . **57.** 1) -62 ; 2) 162 ; 3) 373 . **58.** $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -\frac{3}{2}$. **59.** $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -13$. **60.** $|\vec{p}| = 10$. **61.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$. **64.** $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_1 = 120^\circ$. *Розв'язок.* Оскільки пари векторів $\vec{a} + 3\vec{b}$, $7\vec{a} - 5\vec{b}$ і $\vec{a} - 4\vec{b}$, $7\vec{a} - 2\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, то $(\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$ і $(\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$. Звідси $7a^2 + 16ab - 15b^2 = 0$, $7a^2 - 30ab \cos \varphi + 8b^2 = 0$, де $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$. Розділивши ці співвідношення на a^2 і ввівши позначення $\lambda = \frac{b}{a}$, отримаємо $7 + 16\lambda \cos \varphi - 15\lambda^2 = 0$, $7 - 30\lambda \cos \varphi + 8\lambda^2 = 0$. Виключивши з цих двох співвідношень λ , отримаємо одне рівняння для визначення $\cos \varphi$. Віднімаючи з першого співвідношення друге, отримаємо: $46\lambda \cos \varphi - 23\lambda^2 = 0$, або $2 \cos \varphi = \lambda$. Підставивши це значення в одне з попередніх рівнянь, будемо мати: $7 + 32 \cos^2 \varphi - 60 \cos^2 \varphi = 0$, або $\cos^2 \varphi = \frac{1}{4}$, $\cos \varphi = \pm \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_1 = 120^\circ$. **65.** $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$. **66.** $\vec{x}(-24, 32, 30)$. **67.** $\vec{x}(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **68.** $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$. **70.** $\vec{x}(2, -3, 0)$. **71.** 17. **73.** 13. **74.** $\vec{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \vec{a}$. **75.** $x \in \left\{ \frac{\vec{a}^2}{b^2}, -\frac{\vec{a}^2}{2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2} \right\}$. **78.** 1) $\frac{\pi}{2}$, 2) $\frac{\pi}{3}$, 3) $\arccos \sqrt{\frac{4}{5}}$. **79.** $\arccos \frac{4}{5}$. **81.** 1) $S_1(-2, 7)$, $S_2(4, 1)$, $S_3(2, -3)$. **82.** Довести колінеарність

векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

- 83.** $A(0,0)$, $B(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, $C(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $D(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. **84.** $(11, 14)$. **85.** 1) за умовою $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AM} = -\alpha \overrightarrow{CD} - \beta \overrightarrow{CB}$, отримуємо: $\overrightarrow{CM} (1 - \beta, 1 - \alpha)$; 2) $(\beta, 1 - \alpha)$; 3) $(\alpha, 1 - \beta)$. **86.** $O(-2, 3)$, $A_1(-1, 5)$, $A_2(-1, 2)$. **87.** 1) $C_1(\sqrt{3} + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C_2(-\sqrt{3} + \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$; 2) $C_1(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2})$, $C_2(\frac{-2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2})$. **89.** $8\sqrt{3}$ кв. од. **90.** 13, 15. **91.** 150 кв. од. **92.** $4\sqrt{2}$. **95.** $\angle BAC$ — тупий. **96.** $M_1(6, 0)$ і $M_2(-2, 0)$. **97.** $M_1(0, 28)$ і $M_2(0, -2)$. **98.** $P_1(1, 0)$ і $P_2(6, 0)$. **99.** $C_1(2, 2)$, $R_1 = 2$; $C_2(10, 10)$, $R_2 = 10$. **100.** $C_1(-3, -5)$, $C_2(5, -5)$. **101.** $M_2(3, 0)$. **102.** Умові задачі задовольняють два квадрата, симетрично розташованих відносно сторони AB . Вершини одного квадрата є точки $C_1(-5, 0)$, $D_1(-2, -4)$, вершини другого — $C_2(3, 6)$, $D_2(6, 2)$. **103.** $C(-1, -7)$. **104.** $(-2, 4)$, $(\frac{3}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{2}, 5)$. **105.** $(1, \frac{9}{2})$. *Вказівка.* Центр ваги однорідного стержня знаходиться в середині стержня. **106.** $M(7, -1)$, $N(-5, 8)$. **107.** $(2, -4)$, $(-2, 2)$, $(-1, 1)$. **108.** $(1, -3)$, $(3, 1)$, $(-5, 7)$. **109.** $D(-3, 1)$. **110.** $(1, \frac{9}{2})$. *Вказівка.* Центр ваги однорідного стержня знаходиться в середині стержня. **111.** 13. **113.** $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, $(-4, 1)$, $(1, \frac{8}{3})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$. **114.** $(2, -1)$, $(3, 1)$. **115.** Є дві точки, які задовольняють умови задачі: $C_1(-3, -5)$, $C_2(3, -6)$. **116.** $(\frac{5}{2}, -2)$. **119.** $(3, -1)$. **120.** $(4, -5)$. **121.** $(-9, 0)$. **122.** $(0, -3)$. **123.** $(4\frac{1}{2}, 1)$. **125.** $M(-1, 0)$, $C(0, 2)$. **126.** $(1, \frac{4}{3})$. *Вказівка.* Центр ваги однорідної трикутної пластинки знаходиться в точці перетину медіан. **127.** $C(0, 3)$. *Вказівка.* Центр ваги C двох матеріальних точок A і B знаходиться в точці, розташованій на відрізку AB , яка ділить цей відрізок у відношенні обернено пропорційно масам, зосередженим в точках A і B . Таким чином, точка C ділить відрізок у відношенні $\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$. Знаючи λ визначимо координати точки C . **128.** $(5, 5)$. **130.** а) $(3, 4)$; б) $(\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$ — точка перетину медіан трикутника ABC . **131.** $(3, \frac{1}{2})$. *Вказівка.* Маси сторін трикутника, пропорційні їх довжинам, слід розмістити в центрах ваги відповідних сторін. **132.** $(\frac{19}{21}a, \frac{19}{21}a)$. **133.** а) $4x - 3y + 7 = 0$; б) $5x - 2y = 0$; в) $x + y + 4 = 0$; г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; д) $y - 5 = 0$; е) $x + 1 = 0$; ж) $x - 3y - 16 = 0$; з) $x + y - 4 = 0$. **134.** а) $x = -2 + 5t, y = 3 - t$; б) $x = 3t, y = -2 - 2t$; в) $x = t, y = t$; г) $x = t, y = -3$; д) $x = 1, y = t$. **135.** $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. **137.** 1) $AA_1: 2x + y - 3 = 0$, $BB_1: 5x + 4y - 10 = 0$, $CC_1: 7x + 5y - 13 = 0$. **138.** $7x - 7y + 4 = 0$, $x + 3y + 18 = 0$, $4x - 2y - 7 = 0$. **139.** $4x + y - 3 = 0$. **140.** $x - 5 = 0$. **141.** $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$. *Вказівка.* Умову задачі задовольняють дві прямі: одна з них проходить через точку P і середину відрізка, який з'єднує точки A і B ; друга проходить

через точку P паралельно відрізку AB . **142.** $(-12, 5)$. **144.** $M_1(10, -5)$. **145.** 1) Да; 2) ні; 3) ні. **146.** $P(\frac{5}{3}, 0)$. *Вказівка.* Задача може бути розв'язана за наступною схемою: 1) встановлюємо, що точки M і N розташовані по один бік осі абсцис; 2) знаходимо точку, симетричну одній з даних точок відносно осі абсцис, наприклад точку N_1 , симетричну точці N ; 3) складаємо рівняння прямої, що проходить через точки M і N_1 ; 4) розв'язуючи сумісно знайдене рівняння з рівнянням осі абсцис, отримуємо координати шуканої точки. **147.** $P(0, 11)$. **148.** $Q(4, -2)$. *Вказівка.* Знайти координати точки N' , симетричної точці N відносно даної прямої l . Q є точка перетину l і MN' . **149.** $P(2, -1)$. **150.** $P(2, 5)$. **151.** $\begin{cases} 3x + y \leq 0, \\ 2x - 3y + 1 \leq 0. \end{cases}$ **152.** $M_0 \in \triangle ABC, l \cap \triangle ABC = \emptyset$. **153.** 1) $\begin{cases} 3x + y - 1 \leq 0, \\ 6x + 2y + 3 \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + 2 \geq 0, \\ 2x + 4y - 7 \leq 0. \end{cases}$

154. $\begin{cases} 3x - 2y + 8 \geq 0, \\ 3x - 2y \leq 0, \\ x - 2y + 4 \geq 0, \\ x - 2y \leq 0. \end{cases}$ **155.** $(M \in \triangle ABC) \iff (\overrightarrow{CM} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB})$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1$. 1) $x = 3\alpha + 2\beta, y = 2 - \alpha - 3\beta, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1$. **156.** 1) $\vec{n}(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}), \vec{n}'(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$. **157.** 1) $6x - 4y + 5 = 0$. **159.** Рівняння сторін квадрата: $4x + 3y + 1 = 0, 3x - 4y + 32 = 0, 4x + 3y - 24 = 0, 3x - 4y + 7 = 0$; рівняння його другої діагоналі: $x + 7y - 31 = 0$. **160.** $3x - 4y + 15 = 0, 4x + 3y - 30 = 0, 3x - 4y - 10 = 0, 4x + 3y - 5 = 0$. **161.** $29x - 2y + 33 = 0$. **163.** $x + 2y - 7 = 0, x - 4y - 1 = 0, x - y + 2 = 0$. **164.** $3x - 5y - 13 = 0, 8x - 3y + 17 = 0, 5x + 2y - 1 = 0$. **165.** $2x - y + 3 = 0, 2x + y - 7 = 0, x - 2y - 6 = 0$. *Вказівка.* Якщо на одній з сторін кута дана точка A , то точка, симетрична точці A відносно бісектриси цього кута, буде лежати на іншій стороні. **166.** $4x - 3y + 10 = 0, 7x + y - 20 = 0, 3x + 4y - 5 = 0$. **167.** $4x + 7y - 1 = 0, y - 3 = 0, 4x + 3y - 5 = 0$. **168.** $3x + 7y - 5 = 0, 3x + 2y - 10 = 0, 9x + 11y + 5 = 0$. **169.** $x - 3y - 23 = 0, 7x + 9y + 19 = 0, 4x + 3y + 13 = 0$. **170.** $x + y - 7 = 0, x + 7y + 5 = 0, x - 8y + 20 = 0$. **171.** $2x + 9y - 65 = 0, 6x - 7y - 25 = 0, 18x + 13y - 41 = 0$. **172.** $h = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. **173.** 1) $d = 2, 5$; 2) $d = 3$; 3) $d = 0, 5$; 4) $d = 3, 5$. **176.** *Розв'язок.* Задача про проведення прямих через точку P на відстанні, рівній 5 від точки Q , рівносильна задачі про проведення з точки P дотичних до кола радіуса 5, з центром в Q . Обчислимо відстань QP : $QP = \sqrt{(2-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{26}$. Ми бачимо, що відстань QP більше радіуса кола; отже, з точки P можна провести дві дотичні до цього кола. Тепер перейдемо до складання їх рівнянь. Рівняння всякої прямої, що проходить через точку P , має вид

$$y - 7 = k(x - 2) \quad (1)$$

або $kx - y + 7 - 2k = 0$, де k — поки невизначений кутовий коефіцієнт. Зведемо це рівняння до нормального виду. З цією метою знаходимо нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$. Помноживши рівняння (1) на μ , отримаємо шукане нормальне рівняння

$$\frac{kx - y + 7 - 2k}{\pm \sqrt{k^2 + 1}} = 0. \quad (2)$$

Підставляючи в ліву частину рівняння (2) координати точки Q , маємо: $\frac{|k-2+7-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$. Розв'язуючи це рівняння, знайдемо два значення k : $k_1 = -\frac{5}{12}$, $k_2 = 0$. Підставляючи знайдені значення кутового коефіцієнта в рівняння (1), отримуємо шукані рівняння: $5x + 12y - 94 = 0$ і $y - 7 = 0$. задача розв'язана. **177.** $3x + 4y - 13 = 0$. **178.** $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$. **179.** Умову задачі задовольняють два квадрата, симетрично розташованих відносно сторони AB . Рівняння сторін одного з них: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y + 17 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. Рівняння сторін іншого: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y - 33 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. **180.** $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ або $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$. **181.** 1) $3x - y + 2 = 0$; 2) $x - 2y + 5 = 0$; 3) $20x - 8y - 9 = 0$. **182.** 1) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$; 2) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$; 3) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$. **183.** 1) В одному куті; 2) в суміжних кутах; 3) в вертикальних кутах. **184.** 1) В вертикальних кутах; 2) в суміжних кутах; 3) в одному куті. **185.** $8x + 4y - 5 = 0$. **186.** $x + 3y - 2 = 0$. **187.** $3x - 19 = 0$. **188.** $10x - 10y - 3 = 0$. **189.** Нехай F_1 і F'_1 — внутрішні області гострих кутів, які обмежують дані прямі, F_2 і F'_2 — внутрішні області тупих кутів. Відкладемо відрізки $\overline{N_0N_1} \in \vec{n}_1(A_1, B_1)$ і $\overline{N_0N_2} \in \vec{n}_2(A_2, B_2)$ від точки N_0 перетину даних прямих. Оскільки $\vec{n}_1 \perp l_1$ і $\vec{n}_2 \perp l_2$, то кінці цих відрізків будуть лежати або в F_2 , або в F'_2 . Можливі два випадки.

а) Точки N_1, N_2 лежать в одній і тій же області, наприклад в F_2 . Тоді кут між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ рівний гострому куту між даними прямими, а тому $\vec{n}_1\vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 > 0$. Кінець відрізка $\overline{N_0N_1} \in \vec{n}(A, B)$, відкладеного від довільної точки прямої $Ax + By + C = 0$, розташований в тій відкритій напівплощині, яка характеризується нерівністю $Ax + By + C > 0$. Тому в даному випадку внутрішні області гострих кутів характеризуються нерівностями:

$$A_1x + B_1y + C_1 > 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 < 0 \text{ або}$$

$$A_1x + B_1y + C_1 < 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 > 0.$$

Отже, для всіх внутрішніх точок гострих кутів маємо:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0.$$

б) Точки N_1, N_2 лежать в різних областях F_2 і F'_2 . Тоді кут між векторами $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ рівний тупому куту між даними прямими, і тому $\vec{n}_1 \vec{n}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 < 0$. Внутрішні області гострих кутів в цьому випадку характеризуються нерівностями $A_1 x + B_1 y + C_1 > 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 > 0$ або $A_1 x + B_1 y + C_1 < 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 < 0$. Таким чином, і в цьому випадку для всіх точок внутрішніх точок гострих кутів виконується вказана нерівність. **190.** Гострий кут. **191.** Тупий кут. **192.** $7x + 56y - 40 = 0$. **193.** $\cos \varphi = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$. **194.** 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; 3) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$; 4) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; 5) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; 6) $x^2 + y^2 = 16$; 7) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; 8) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$; 9) $(x-1)^2 + y^2 = 1$. **195.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$. **196.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$. **197.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. **198.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$ і $(x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$. **199.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ і $(x + \frac{202}{49})^2 + (y - \frac{349}{49})^2 = (\frac{185}{49})^2$. **200.** $(x-5)^2 + y^2 = 16$, $(x+15)^2 + y^2 = 256$, $(x - \frac{35}{3})^2 + (y - \frac{40}{3})^2 = (\frac{32}{3})^2$, $(x - \frac{35}{3})^2 + (y + \frac{40}{3})^2 = (\frac{32}{3})^2$. **201.** $b^2 = R^2(1+k^2)$. **202.** а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; $C(1, -2)$, $r = 5$; б) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $C(1, 0)$, $r = 1$; в) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$; $C(2, 1)$, $r = 2$. Решта рівнянь не визначають коло. **203.** 1) $x + 5y - 3 = 0$, 2) $x+2 = 0$, 3) $3x-y-9 = 0$, 4) $y+1 = 0$. **204.** $2x-5y+19 = 0$. **205.** а) 7, б) 17, в) 2. **206.** $M_1(-1, 5)$ і $M_2(-2, -2)$. **207.** $7x-4y = 0$. **208.** 2. **209.** $x-2y-5 = 0$ і $2x-y-5 = 0$. **210.** $2x+y-8 = 0$ і $x-2y+11 = 0$. **211.** 90° . **212.** $d = \sqrt{10}$. **213.** $2x+y-5 = 0$ і $2x+y+5 = 0$. **214.** $2x+y-1 = 0$ і $2x+y+19 = 0$. **215.** 3. **216.** При $\lambda \neq 1$ шукане геометричне місце являє собою коло, центр якого лежить на прямій AB , а при $\lambda = 1$ — пряму, перпендикулярну до відрізка AB і яка проходить через його середину. *Вказівка.* Якщо початок координат прямокутної декартової системи координат помістити в точку B , а напрямок

вісі Ox визначити вектором $\overrightarrow{BA}$, то рівняння шуканого г.м.т. буде мати вид: $x^2(1-\lambda^2) + y^2(1-\lambda^2) - 2ax + a^2 = 0$, де a — довжина відрізка AB . **217.** Нехай $AB = 2a$, а α^2 — дана сума квадратів. а) $\alpha^2 > 2a^2$. Шукане г.м.т. є коло з центром в середині відрізка AB ; б) $\alpha^2 = 2a^2$. Шукане г.м.т. являє собою точку — середину відрізка AB ; в) $\alpha^2 < 2a^2$. На площині не існує жодної точки, яка задовольняє умову задачі. **219.** Коло, центр якого співпадає з центром ваги трикутника ABC .

220. Коло. **222.**
$$\begin{cases} x' = x - \frac{2k}{k^2+1}(kx - y + b) \\ y' = y + \frac{2}{k^2+1}(kx - y + b). \end{cases}$$
 227.
$$\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha, \\ y' = y_0 + (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha. \end{cases}$$
 229. $(\frac{5}{2}, 0)$. **232.** $BC : (\sqrt{3} - 2)x + (1 + 2\sqrt{3})y + 27 - 7\sqrt{3} = 0$, $AC : (2 + \sqrt{3})x + (2\sqrt{3} -$

$$1) y - 27 - 7\sqrt{3} = 0. \quad \mathbf{238.} \quad 2x - 3y - 4 = 0. \quad \mathbf{239.} \quad \begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases} \quad \mathbf{241.}$$

1) Поворот з центром $(1, 0)$; 2) симетрія з віссю $2x - y - 2 = 0. \quad \mathbf{243.}$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2. \end{cases} \quad \mathbf{244.} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad \mathbf{245.} \quad 11x + 2y - 3 = 0.$$

$$\mathbf{247.} \quad \begin{cases} x' = x - 2A \frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2} \\ y' = y - 2B \frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}. \end{cases} \quad \mathbf{254.} \quad \text{Вказівка. Доведіть, що композиція}$$

двох даних гомотетій з центрами в різних точках є одна з гомотетій в третій

$$\text{точці.} \quad \mathbf{255.} \quad \begin{cases} x' = \frac{48}{25}x - \frac{14}{25}y - \frac{192}{25}, \\ y' = \frac{14}{25}x + \frac{48}{25}y - \frac{6}{25}. \end{cases} \quad \mathbf{256.} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{9}{5}, \\ y' = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{5}, \end{cases} \quad (5, -1),$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5}. \quad \mathbf{261.} \quad \begin{cases} x' = 2x - y - 1, \\ y' = x + 2y + 5. \end{cases} \quad \mathbf{262.} \quad (1, 2). \quad \mathbf{264.} \quad \begin{cases} x' = 5x - 2y + 6, \\ y' = 4x - y + 6. \end{cases} \quad \mathbf{265.}$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = -2y - 1. \end{cases} \quad \mathbf{275.} \quad 1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1; 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; 3) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1; 4)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; 5) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1; 6) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1; 7) \frac{x^2}{5} + y^2 = 1; 8) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1; 9) \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{\frac{117}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1; 10) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1; \mathbf{276.} \quad 1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1; 2)$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1; 3) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1; 4) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1; 5) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1; 6) \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1; \mathbf{277.} \quad 1) 5 \text{ і } 3; 2) F_1(-4, 0), F_2(4, 0); 3) \varepsilon = \frac{4}{5}; 4) x = \pm \frac{25}{4}. \mathbf{278.} \quad 15; \mathbf{279.} \quad 1)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; 2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1; 3) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1; 4) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1; 5) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1; 6) \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1; 7) \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1. \mathbf{280.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(\frac{5}{3}a)^2} = 1. \mathbf{281.} \quad \frac{4}{5}. \mathbf{282.} \quad 1)$$

$$\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1; 2) 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0; 3) 68x^2 + 48xy + 82y^2 - 625 = 0; 4) 11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0. \mathbf{283.} \quad 5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0.$$

$$\mathbf{284.} \quad 4x^2 + 3y^2 + 32x - 14y + 59 = 0. \mathbf{285.} \quad 4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0. \mathbf{286.}$$

$$17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0. \mathbf{287.} \quad 3x + 2y - 10 = 0 \text{ і } 3x + 2y + 10 = 0.$$

$$\mathbf{288.} \quad x + y - 5 = 0 \text{ і } x + y + 5 = 0. \mathbf{289.} \quad 2x - y - 12 = 0, 2x - y + 12 = 0,$$

$$d = \frac{24\sqrt{5}}{5}. \mathbf{290.} \quad M_1(-3, 2), d = \sqrt{13}. \mathbf{291.} \quad x + y - 5 = 0 \text{ і } x + 4y - 10 = 0.$$

$$\mathbf{292.} \quad 4x - 5y - 10 = 0. \mathbf{293.} \quad d = 18. \mathbf{294.} \quad \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1.$$

$$\mathbf{295.} \quad \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1. \mathbf{297.} \quad \frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1. \text{Вказівка. Скористатись властивістю}$$

еліпса, сформульованою в задачі 296. $\mathbf{298.} \quad 1) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1; 2) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; 3)$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1; 4) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1; 5) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1; 6) \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1; 7) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$8) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1; 9) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \mathbf{299.} \quad 1) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = -1; 2) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1; 3)$$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1; 4) \frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1; 5) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1. \mathbf{300.} \quad 1) a = 3, b = 4; 2)$$

$$F_1(-5, 0), F_2(5, 0); 3) \varepsilon = \frac{5}{3}; 4) y = \pm \frac{4}{3}x; 5) x = \pm \frac{9}{5}. \mathbf{301.} \quad 1) a = 3, b = 4;$$

$$2) F_1(0, -5), F_2(0, 5); 3) \varepsilon = \frac{5}{4}; 4) y = \pm \frac{4}{3}x; 5) x = \pm \frac{16}{5}. \mathbf{302.} \quad 12 \text{ кв. од.}$$

303. 8. **304.** 12. **305.** 10. **306.** 27. **307.** 1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 16$; 3) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ або $\frac{x^2}{\frac{61}{9}} - \frac{y^2}{\frac{305}{16}} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **308.** $\varepsilon = \sqrt{2}$.
309. $\varepsilon = \sqrt{3}$. **310.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. **311.** $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. **313.** 1) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; 2) $24xy + 7y^2 - 144 = 0$; 3) $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$. **314.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **315.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.
316. $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$. **317.** $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$.
318. $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$. **319.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **320.** $10x - 3y - 32 = 0$; $10x - 3y + 32 = 0$. **321.** $x + 2y - 4 = 0$; $x + 2y + 4 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. **322.** $M_1(-6, 3)$; $d = \frac{11}{13}\sqrt{13}$. **323.** $2x + 5y - 16 = 0$.
324. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. **325.** $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$ і $y = 1$. **326.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **327.** $\frac{\pi}{2}$. **328.** $(\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}, \pm 1, 8)$. **329.** $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$. **330.** $5x - 2y \pm 9 = 0$.
331. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$; 4) $x^2 = -6y$. **332.** 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$. **333.** $x^2 = -12y$. **334.** $F(6, 0)$, $x + 6 = 0$.
335. 12. **336.** 6. **337.** $(9, 12)$, $(9, -12)$. **338.** $y^2 = -28x$. **339.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$.
340. $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$. **341.** $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **342.** $F(9, -8)$.
343. $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$. **344.** $x + y + 2 = 0$. **345.** $2x - y - 16 = 0$.
346. $d = 2\sqrt{13}$. **347.** $M_1(9, -24)$, $d = 10$. **348.** $3x - y + 3 = 0$ і $3x - 2y + 12 = 0$.
349. $5x - 18y + 25 = 0$ **352.** $9x^2 - 6xy + y^2 - 68x - 4y + 164 = 0$, $p = \frac{2}{5}\sqrt{10}$.
353. $(-3, -6)$, $(\frac{3}{4}, 4)$. **354.** 2. **355.** $(5, 0)$, $(2, 0)$ і $(0, 5)$, $(0, 1)$. **356.** $l = 2$.
357. При $\lambda = \pm 5$ крива відтинає на осі ординат хорду, рівну 3; при $\lambda = \pm 4$ крива дотикається осі ординат. *Вказівка.* Задача зводиться до дослідження квадратного рівняння $y^2 + \lambda y + 4 = 0$, яке отримуємо з рівняння кривої, поклавши $x = 0$. Для виконання першої умови необхідно, щоб різниця коренів цього квадратного рівняння $y_2 - y_1 = 3$. Для виконання другої умови треба, щоб $y_2 = y_1$. **358.** 1) $(1, 0)$ і $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$; 2) точки перетину уявні; 3) пряма дотикається кривої в точці $(1, 0)$; 4) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$, пряма перетинає криву лише в одній точці. **359.** 1) $C(-66, -28)$; 2) $C(\frac{32}{11}, -\frac{15}{22})$; 3) немає центрів; 4) $C(1, -\frac{3}{5})$; 5) $C(0, 0)$; 6) пряма центрів. **360.** 1) $(7, 5)$; 2) $(-1, -1)$; 3) $(0, 1)$; 4) центра немає; 5) крива має пряму центрів $x + y + 1 = 0$; 6) $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$; 7) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$; 8) лінія центрів $x + 3y + 2 = 0$; 9) центра немає; 10) лінія центрів $x - 2y + 5 = 0$.
361. $5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0$. **362.** 1) $6x - 2y + 19 = 0$ і $2x + 2y - 1 = 0$; 2) $6x + 14y + 11 = 0$ і $2x + 2y - 1 = 0$; 3) $5y + 3 = 0$ і $25x - 5y + 13 = 0$; 4) $2x - 3y + 1 = 0$ і $x - 1 = 0$; **363.** $10x^2 + 12xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$. **364.** $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. **365.** $5x + 8y - 24 = 0$; $5x - 8y - 8 = 0$; $x - 4y - 2 = 0$; $x + 4y - 3 = 0$. **366.** $7x + 4y + 10 = 0$ в точці $(-2, 1)$ і $3x - 4y + 18 = 0$ в точці $(-2, 3)$. **367.** $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$; $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$; $y_0y = p(x + x_0)$; $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 2$.
368. $2x + 5y = 0$ і $2x + y = 0$. **369.** $7x - 2y - 13 = 0$; $x - 3 = 0$. **370.** $y + 4 = 0$; $3y - 4 = 0$. **371.** $x + y - 1 = 0$, $(1, 0)$; $x + y + 2 = 0$, $(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3})$.
372. $6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0$. **373.** $3x - y - 6 = 0$ і $x - 2y - 2 = 0$;

$\varphi = \frac{\pi}{4}$. **374.** $\lambda = \frac{3}{4}$. **375.** $x + 2y + 3 = 0$ і $7x - 5y + 2 = 0$. **376.** $y - 1 = 0$ і $4x + 5y + 3 = 0$. **377.** $x + 1 = 0$. **378.** $2x - y - 8 = 0$. **379.** $49x - 49y + 44 = 0$. **380.** 1) $6x + 7y + 4 = 0$; 2) $7x + 10y + 5 = 0$; 3) $x + 3y + 1 = 0$. **381.** $17x - 4y - 4 = 0$. **382.** $(-3, 5)$. **383.** 1) $2x + 2y + 1 = 0$ і $x - y + 2 = 0$; 2) $28x + 21y + 4 = 0$ і $33x - 44y - 6 = 0$; 3) $x + y = 0$ і $x - y = 0$. **385.** $5x + 5y + 2 = 0$. **386.** $28x - 19y + 24 = 0$. **387.** $32x + 51y - 146 = 0$. **388.** 1) $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) $k_1 = -3, k_2 = \frac{1}{3}$; 3) $k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = 2$; 4) k_1 і k_2 невизначені (коло). **389.** 1) $x + 6y = 0, 6x - y - 37 = 0$; 2) $20x + 20y + 21 = 0, 2x - 2y - 7 = 0$. **390.** 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. **391.** 1) $y^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}x$; 2) $y^2 = \frac{2}{\sqrt{13}}x$; 3) $y^2 = \frac{6}{\sqrt{10}}x$. **392.** 1) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $x^2 - 4y^2 = 0$; 5) $x^2 + 2y^2 = -1$; 6) $2x^2 + 3y^2 = 0$. **393.** 1) $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{5} = 1$; 2) $9x^2 - 16y^2 = 5$; 3) $x^2 - 4y^2 = 0$; 4) $2x^2 + 3y^2 = -1$; 5) $x^2 + 2y^2 = 0$; 6) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 7) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; 8) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. **394.** $(0, 0, 0), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$. **395.** $\frac{7}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$. **396.** 1) $(-1, 4, -3)$, 2) $(-1, 2, 1)$. **397.** $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}$. **400.** R' орієнтований додатньо. **401.** 1) $\sqrt{21}$. **402.** $D\left(\frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{3}{2}\right), |AD| = \frac{570}{5}$. **403.** 45° . **404.** 1) $C_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. **405.** Коло. **406.** 1) $\left(\frac{21}{13}, \frac{14}{13}, -\frac{5}{13}\right)$. **407.** $\cos A = -\frac{89}{91}, \cos B = \frac{23}{7\sqrt{11}}, \cos C = \frac{36}{13\sqrt{11}}$. **409.** 1) 7; 2) 13; 3) 5. **412.** $\angle M_1M_3M_2$ — тупий. **414.** $(5, 0, 0)$ і $(-11, 0, 0)$. **415.** $(0, 2, 0)$. **416.** $(2, -1, -1), (-1, -2, 2), (0, 1, -2)$. **417.** 7. **418.** $C(6, 1, 19)$ і $D(9, -5, 12)$. **419.** $D(9, -5, 6)$. **420.** Четверта вершина паралелограма може співпадати з однією з точок: $D_1(-3, 4, -4), D_2(1, -2, 8), D_3(5, 0, -4)$. **421.** $C(1, 5, 2), D(3, 2, 1), E(5, -1, 0), F(7, -4, -1)$. **422.** $A(-1, 2, 4), B(8, -4, -2)$. **423.** $\frac{2}{3}\sqrt{74}$. **424.** $\frac{3}{4}\sqrt{10}$. **425.** $(2, -3, 0), (1, 0, 2), (0, 3, 4)$. **426.** $||\vec{a}, \vec{b}|| = 15$. **427.** $||\vec{a}, \vec{b}|| = 16$. **428.** $\vec{a}\vec{b} = \pm 30$. **429.** 1) 24; 2) 60. **430.** 1) 3; 2) 27; 3) 300. **431.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ повинні бути колінеарними. **435.** 1) $\{5, 1, 7\}$, 2) $\{10, 2, 14\}$, 3) $\{20, 4, 28\}$. **436.** 1) $\{6, -4, -6\}$, 2) $\{-12, 8, 12\}$. **437.** 14 кв.од. **438.** 5. **439.** $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. **440.** $\{-6, -24, 8\}$. **441.** $\vec{m}(45, 24, 0)$. **442.** $\vec{x}(7, 5, 1)$. **443.** 150. **445.** $||\vec{p}, \vec{q}|| = 11$. **446.** 37.5 кв. од. **447.** 1) Права; 2) ліва; 3) ліва; 4) права; 5) вектори компланарні; 6) ліва. **448.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 24$. **449.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm 27$; знак плюс в тому випадку, коли трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права, і мінус — коли ця трійка ліва. **453.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -7$. **454.** 1) Компланарні; 2) не компланарні; 3) компланарні. **456.** 3 куб. од. **457.** 11. **458.** $D_1(0, 8, 0), D_2(0, -7, 0)$. **459.** $V = 4|([\vec{c}, \vec{b}]\vec{a})|$. **460.** 1) $V = 25$ куб од.; 2) $V = 0$. *Вказівка.* Друга відповідь очевидна, оскільки із розкладання відповідних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ видно, що вони компланарні. **461.** $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$. **462.** 1) і 3) компланарні; 2) некомпланарні. **463.** $\frac{\pi}{2}$. **464.** 12. **465.** 3. **466.** $\frac{a}{3}$. **467.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$. **468.** $5x - 3z = 0$. **469.** $2x - y - z - 6 = 0$. **470.** $x - y - 3z + 2 = 0$. **471.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

472. $x - y - z = 0$. **473.** $3x + 3y + z - 8 = 0$. **474.** 1) і 3) визначають паралельні площини. **475.** 1) і 2) визначають перпендикулярні площини. **476.** 1) $l = 3$, $m = -4$; 2) $l = 3$, $m = -\frac{2}{3}$; 3) $l = -3\frac{1}{3}$, $m = -1\frac{1}{5}$. **477.** 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$. **478.** 1) $\frac{1}{3}\pi$ і $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ і $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2}{15}$ і $\pi - \arccos \frac{2}{15}$. **479.** $4x - 3y + 2z = 0$. **480.** $2x - 3z - 27 = 0$. **481.** $7x - y - 5z = 0$. **482.** $x + 2z - 4 = 0$. **483.** $4x - y - 2z - 9 = 0$. **484.** $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$. **487.** 1) $a \neq 7$; 2) $a = 7$, $b \neq 3$. **488.** 1) $y + 4z + 10 = 0$; 2) $x - z - 1 = 0$; 3) $5x + y - 13 = 0$. **489.** 240 кв. од. **490.** 8 куб. од. **491.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$. **492.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. **493.** $x + y + z + 5 = 0$. **494.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$. **495.** $2x - y - 3z - 15 = 0$. **496.** $2x - 3y + z - 6 = 0$. **497.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$. **498.** 1) $d = 3$; 2) $d = 1$; 3) $d = 0$ — точка M_3 лежить на площині. **499.** $d = 4$. **500.** 1) По один бік; 2) по один бік; 3) по різні боки; 4) по один бік; 5) по різні боки; 6) по різні боки. **503.** 1) $d = 2$; 2) $d = 3, 5$; 3) $d = 6, 5$; 4) $d = 1$; 5) $d = 0, 5$; 6) $d = \frac{5}{6}$. **504.** 8 куб. од. **505.** Умові задачі задовольняють дві точки: $(0; 7; 0)$ і $(0; -5; 0)$. **506.** Умові задачі задовольняють дві точки: $(0; 0; -2)$ і $(0; 0; -6\frac{4}{13})$. **507.** Умові задачі задовольняють дві точки: $(2; 0; 0)$ і $(\frac{11}{43}; 0; 0)$. **508.** $4x - 4y - 2z + 15 = 0$. **509.** $2x - 2y - z - 18 = 0$, $2x - 2y - z + 12 = 0$. **510.** 1) $4x - y - 2z - 4 = 0$; 2) $3x + 2y - z + 1 = 0$; 3) $20x - 12y + 4z + 13 = 0$. **511.** 1) $4x - 5y + z - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 8 = 0$; 2) $x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 2z - 1 = 0$; 3) $3x - 6y + 7z + 2 = 0$, $x + 4y + 3z + 4 = 0$. **512.** 1) Точка M і початок координат лежать в суміжних кутах; 2) точка M і початок координат лежать в одному куті; 3) точка M і початок координат лежать в вертикальних кутах. **513.** 1) Точки M і N розташовані в суміжних кутах; 2) точки M і N розташовані в вертикальних кутах. **514.** Початок координат лежить всередині гострого кута. **515.** Точка M лежить всередині тупого кута. **516.** $8x - 4y - 4z + 5 = 0$. **517.** $23x - y - 4z - 24 = 0$. **518.** $x - y - z - 1 = 0$. **519.** $x + y + 2z = 0$. **520.** $x = 2 + u - 2v$, $y = -5 + 9u + 5v$, $z = 1 - 3u - 2v$. **521.** Координати вектора $\vec{a}$ утворюють розв'язок рівняння: $5a_1 - 2a_2 - 3a_3 = 0$. **522.** $x = 2 + u$, $y = -1 + 2u + 3v$, $z = 3 + v$. **523.** $x + y + z - 6 = 0$, $14x + 13y + 9z - 74 = 0$, $8x + 7y + 5z - 40 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$, $14x + 13y + 9z - 70 = 0$, $8x + 7y + 5z - 42 = 0$. **524.** 1) $x - y - z - 7 \leq 0$, $2x + y - 3z + 3 \leq 0$; 2) M_1 і M_2 — внутрішні точки вертикальних двохгранних кутів. **525.** M_0 лежить всередині тетраедра. **526.** $\Phi_1 = \{M(x, y, z) | x - 2y - 3z + 5 < 0 \text{ і } 2x - 4y - 6z + 7 < 0\}$, $\Phi_2 = \{M(x, y, z) | x - 2y - 3z + 5 > 0 \text{ і } 2x - 4y - 6z + 7 < 0\}$, $\Phi_3 = \{M(x, y, z) | x - 2y - 3z + 5 > 0 \text{ і } 2x - 4y - 6z + 7 > 0\}$. **527.** $2x + 6y - 4z - 56 = 0$. **528.** $D'(4; -2; -4)$. **529.** $7x - 5y + 11z - 52 = 0$. **530.** $x + z - 3 = 0$. **531.** $\cos \varphi = -\frac{8}{9}$. **533.** $DH = 1$. **534.** $8x + 12y + 4z + 3 = 0$. **535.** $2x - y - z + 2 = 0$. **536.** $\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. **537.** $x - 2y - 2z - 10 = 0$, $2x + 2y - z + 1 = 0$, $2x - y + 2z + 10 = 0$, $2x - y + 2z - 4 = 0$. **538.** $3x - 2y + 3z - 4 = 0$. **539.** $3x - 2y + 2 = 0$.

541. $3x + y - 4z + 5 = 0$, $\cos \varphi = \frac{4}{9}$. **542.** $5x - 5y - 2 = 0$. **543.** $3x + z + 16 = 0$.
544. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$. **545.** 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-1}$; 4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$. **546.** 1) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$; 2) $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$; 3) $x = 3t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 5t - 3$. **547.** 1) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$; 2) $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$; 3) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$. **548.** $(9; -4; 0)$, $(3; 0; -2)$, $(0; 2; -3)$. **549.** $x = 5t + 4$, $y = -11t - 7$, $z = -2$. **550.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$.
551. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{7}$. **552.** $x = 3t + 3$, $y = 15t + 1$, $z = 19t - 3$.
553. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. **554.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$. Розв'язок. Покладаючи, наприклад, $z_0 = 0$, знаходимо з даної системи $x_0 = 2$, $y_0 = -1$; таким чином, ми вже знаємо одну точку прямої: $M_0(2; -1; 0)$. Тепер знайдемо напрямний вектор. Маємо $\vec{n}_1(1; -2; 3)$, $\vec{n}_2(3; 2; -5)$; звідси $\vec{a} = [\vec{n}_1 \vec{n}_2](4; 14; 8)$, тобто $l = 4$, $m = 14$, $n = 8$. Підставляючи знайдені значення x_0 , y_0 , z_0 і l , m , n в рівності $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, отримуємо канонічні рівняння даної прямої: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$ або $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$; 3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. **555.** 1) $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t - 3$; 2) $x = -t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 5t - 1$. **558.** 60° . **559.** 135° . **560.** $\cos \varphi = \pm \frac{4}{21}$. **562.** $l = 3$.
563. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$. **564.** $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$. **565.** $x = 2t - 5$, $y = -3t + 1$, $z = -4t$. **566.** $M_1 \in l$, $M_2 \notin l$. **567.** $x = 2 + t$, $y = 3 - t$, $z = -1 + t$.
568. $\begin{cases} x - 3y - 2z - 5 = 0, \\ 3x + 5y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$ **569.** $(-1; -11; 0)$. **570.** $\cos \varphi = \frac{19}{15\sqrt{2}}$. **571.** 1) Перетинаються; 2) мимобіжні; 3) мимобіжні; 4) мимобіжні; 5) паралельні; 6) перетинаються. **572.** $x = 1 + 4t$, $y = -2t$, $z = t$. **573.** $\begin{cases} x - 3y + 5z + 2 = 0, \\ x - 2y - 5z + 9 = 0. \end{cases}$
574. $x = 1 + 11t$, $y = \frac{1}{2} - 5t$, $z = -7t$. **575.** $\begin{cases} 5x + y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 2z = 0. \end{cases}$
576. $x = -1 - t$, $y = 3 + 3t$, $z = 2 + 4t$. **577.** $\begin{cases} 2x - y + 10z - 47 = 0, \\ x + 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$
578. $x = 4 + 32t$, $y = 1 + t$, $z = -2 - 5t$. **579.** $\begin{cases} 2x + 2y - z - 14 = 0, \\ 10x + 11y + 4z - 53 = 0. \end{cases}$
580. $\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0, \\ x - y - z - 5 = 0. \end{cases}$ **581.** $\begin{cases} 2x - y + z - 20 = 0, \\ x + y + z - 10 = 0. \end{cases}$ **582.** $x - 2y + 2z + 3 = 0$. **583.** $\begin{cases} 3x - 3y + 2z - 11 = 0, \\ x - y - 3z = 0. \end{cases}$ **584.** $\begin{cases} 54x + 32y - 49z - 76 = 0, \\ 69x - 42y + 41z + 235 = 0. \end{cases}$
585. $7x - 11y - 13z - 35 = 0$. **588.** 1) $(2; -3; 6)$; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма лежить в площині. **589.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{3}$. **590.** $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$.
591. $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **592.** $x + 2y + 3z = 0$. **593.** $m = -3$. **594.** $C = -2$.

595. $A = 3$, $D = -23$. **596.** $A = -3$, $B = 4\frac{1}{2}$. **597.** $l = -6$, $C = \frac{3}{2}$. **598.** $(3; -2; 4)$. *Розв'язок.* Шукаю точку знайдемо, розв'язуючи сумісно рівняння даної прямої з рівнянням площини, проведеної з точки P перпендикулярно до цієї прямої. Перш з все відмітимо, що напрямний вектор даної прямої $(3; 5; 2)$ буде нормальним вектором шуканої площини. Рівняння площини, яка проходить через точку $P(2; -1; 3)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(3; 5; 2)$, буде мати вид $3(x-2)+5(y+1)+2(z-3)=0$ або $3x+5y+2z-7=0$. Розв'язуючи сумісно рівняння $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$, $3x+5y+2z-7=0$, знайдемо координати шуканої проекції: $x=3$, $y=-2$, $z=4$. **599.** $Q(2; -3; 2)$. **600.** $Q(4; 1; -3)$. **601.** $(1; 4; -7)$. *Розв'язок.* Шукаю точку знайдемо, розв'язуючи сумісно рівняння даної площини з рівнянням прямої, проведеної з точки P перпендикулярно до цієї площини. Перш за все відмітимо, що нормальний вектор даної площини $(2; -1; 3)$ буде напрямним вектором шуканої прямої. Параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $P(5; 2; -1)$ і має напрямний вектор $\vec{a}(2; -1; 3)$, будуть мати вид $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=3t-1$. Розв'язуючи сумісно рівняння $2x-y+3z+23=0$, $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=3t-1$, знайдемо координати шуканої проекції: $x=1$, $y=4$, $z=-7$. **602.** $Q(-5; 1; 0)$. **603.** $P(3; -4; 0)$. *Вказівка.* Задача може бути розв'язана за наступною схемою: 1) встановлюємо, що точки A і B розташовані по один бік від площини Oxy ; 2) знаходимо точку, симетричну одній з даних точок відносно площини Oxy , наприклад точку B_1 , симетричну точці B ; 3) складаємо рівняння прямої, що проходить через точки A і B_1 ; 4) розв'язуючи сумісно знайденні рівняння прямої з рівнянням площини Oxy , отримуємо координати шуканої точки. **604.** $P(-2; 0; 3)$. **605.** $P(-2; -2; 5)$. **606.** $P(-1; 3; -2)$. **607.** $d = 7$. *Розв'язок.* Виберемо на прямій $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$ яку-небудь точку, наприклад $M_1(-3; -2; 8)$; будемо вважати, що напрямний вектор прямої $\vec{a}(3; -2; 8)$ прикладений в точці M_1 . Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{M_1P}$ визначить площу паралелограма, побудованого на цих векторах; висота цього паралелограма, проведена з вершини P , буде шуканою відстанню d . Отже, для обчислення відстані d маємо формулу $d = \frac{||\vec{a}\overrightarrow{M_1P}||}{|\vec{a}|}$. Тепер обчислимо координати вектора $\overrightarrow{M_1P}$, знаючи координати його кінця і початку: $\overrightarrow{M_1P}(4; 1; -10)$. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{M_1P}$: $[\vec{a}\overrightarrow{M_1P}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}$. Визначимо його модуль: $||[\vec{a}\overrightarrow{M_1P}|| = \sqrt{18^2 + 22^2 + 5^2} = \sqrt{833} = 7\sqrt{17}$. Обчислимо модуль вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$. Знайдемо шукану відстань: $d = \frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 7$. **608.** 1) 21; 2) 6; 3) 15. **609.** $d = 25$. **610.** $9x+11y+5z-16=0$.

611. $4x+6y+5z-1=0$. **612.** $2x-16y-13z+31=0$. **613.** $6x-20y-11z+1=0$. **614.** $(2; -3; -5)$. **615.** $Q(1; -2; 2)$. **616.** $Q(1; -6; 3)$. **617.** $13x-14y+11z+51=0$. **618.** $x-8y-13z+9=0$. **619.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$. **620.** $x=8t-3$,

$y=-3t-1$, $z=-4t+2$. **621.** 1) 13; 2) 3; 3) 7. **622.**
$$\begin{cases} x-3y+z-1=0, \\ 3x-3z-2=0. \end{cases}$$

623. 1) $x^2+y^2+z^2=81$; 2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; 3) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; 4) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; 5) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; 6) $x^2+y^2+z^2=9$; 7) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$; 8) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$; 9) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$.

624. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ і $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$. **625.** $R=5$.

626. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **627.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.

628. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$. **629.** 1) $C(3; -2; 5)$, $r=4$; 2) $C(-1; 3; 0)$, $r=3$; 3) $C(2; 1; -1)$, $r=5$; 4) $C(0; 0; 3)$, $r=3$; 5) $C(0; -10; 0)$, $r=10$.

630. $x=5t-1$, $y=-t+3$, $z=2t-0,5$. **631.** $\frac{x-\frac{1}{2}}{2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-3} = \frac{z+\frac{1}{2}}{4}$.

632. а) 5; б) 21; в) 7. **633.** 1) Площина перетинає сферу; 2) площина дотикається до сфери; 3) площина проходить поза сферою.

634. 1) Пряма перетинає сферу; 2) пряма проходить поза сферою; 3) пряма дотикається до сфери.

635. $M_1(-2; -2; 7)$, $d=3$. **636.** $6x-3y-2z-49=0$.

637. $(2; -6; 3)$. **638.** $2x-y-z+5=0$. **639.** $3x-2y+6z-11=0$,

$6x+3y+2z-30=0$. **640.** $x+2y-2z-9=0$, $x+2y-2z+9=0$.

641. $4x+3z-40=0$, $4x+3z+10=0$. **642.** $4x+6y+5z-103=0$,

$4x+6y+5z+205=0$. **644.** $x-y-z-2=0$. **645.** $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=49$,

$(x+1)^2+(y-7)^2+(z-9)^2=49$. **646.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=36$.

648. $2x+y-4z+17=0$, $2x+y-4z-25=0$. **649.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$.

650. $2x-2y-z+3=0$. **651.** $z^4=100(x^2+y^2)$. **652.** $z^2+25=10\sqrt{x^2+y^2}$.

653. а) $\frac{x^2+z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$; г) $x^2+z^2=2py$.

654. $z^2 = \sin^2 \sqrt{x^2+y^2}$. **655.** а) Поверхня утворена обертанням кривої

$$\begin{cases} y^4+y^2+z=0, \\ x=0 \end{cases}$$
 навколо осі Oz ; б) поверхня утворена обертанням кола

радіуса 2 навколо хорди, яка стягує дугу 60° ; в) однопорожнинний гіперболоїд, утворений обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Oy .

656. Поверхня являє собою тор. Переріз — два концентричних кола з центром в

початку координат: $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-49)=0$. **657.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$.

658. $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. **659.** $20x^2+13y^2+25z^2-24xy-12xz-16yz-220x+$

$190y-50z+641=0$. *Розв'язок.* Всі точки $M(x, y, z)$ кругової циліндричної

поверхні знаходяться на однаковій відстанні ρ від її осі, де ρ — відстань

від точки $M_0(2, -1, 0)$ до даної прямої. Як відомо, $\rho = \frac{|\vec{p} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\vec{p}|}$, де M_0 —

дана точка, M_1 — початкова точка, а $\vec{p}$ — напрямний вектор прямої. Без-

посереднім підрахунком переконуємось в тому, що $\rho = 3$. Для того щоб точка $M(x, y, z)$ лежала на круговій циліндричній поверхні, необхідно і до-

статньо, щоб $\frac{|\vec{p} \cdot \overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{p}|} = 3$. Підставивши сюди координати даних точок

і вектора $\vec{p}$, після елементарних перетворень, отримуємо рівняння поверхні.

660. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$.

661. а) $(x - z)^2 + 2(x - z)y + 3y^2 - (x - z) = 0$, б) $y^2 - yz + 5 = 0$,

в) $\frac{(x+z)^2}{5} - \frac{(y+2z)^2}{4} = 1$, г) $(x-1)^2 + z^2 = 4$. **662.** $x^2 + y^2 = 25$. **663.** $2x^2 + (y + z)^2 - 18 = 0$. **664.** а) $(x - z)^2 + y^2 - y(1 - z) = 0$, б) $x^2 + y^2 - 16(1 - z)^2 = 0$.

665. $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz + 62x + 44y - 32z - 11 = 0$. Розв'язок.

Для того щоб точка $M(x, y, z)$ лежала на конічній поверхні, необхідно і

достатньо, щоб вектор $\overrightarrow{SM}$ утворював з нормальним вектором $\vec{n}$ даної

площини кут $\theta = 90^\circ - \varphi = 45^\circ$. Оскільки $\overrightarrow{SM} (x - 1, y - 2, z - 4)$ і $\vec{n}(2, 2, 1)$,

то $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2(x-1)+2(y-2)+(z-4)}{3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}}$. Звідси отримуємо рівняння шуканої

поверхні. **666.** $27[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2] = 4(2x + 2y - y - z - 3)^2$.

667. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **668.** $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$.

669. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{49} = 0$. **670.** $35x^2 + 35y^2 - 52z^2 - 232xy - 116xz + 116yz + 232x - 70y - 116z + 35 = 0$.

671. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 4xy + 12xz - 6yz = 0$.

672. $4x^2 - 15y^2 - 6z^2 - 12xz - 36x + 24z + 66 = 0$. **673.** $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$.

674. $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$.

675. $(x + 2y + z)^2 + 4(x - z)^2 = 16$. **676.** $9[2(x - 2) + 2y - (z + 1)]^2 = 16[(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2]$.

677. $(x - y - 1)^2 + (x - z + 1)^2 + (y - z + 2)^2 = 6$.

678. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$.

679. $(x + y + z)^2 + 4(x - y - \frac{9}{4}) = 0$. **680.** 1) $(x + \frac{5}{2}z)^2 + (y + \frac{3}{2}z)^2 = 25$;

2) $(y - \frac{3}{5}x)^2 + (z + \frac{2}{5}x)^2 = 4$; 3) $(x - \frac{5}{3}y)^2 - 2(z + \frac{2}{3}y) = 0$. **681.** $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 3$.

682. $(x + 4)^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$. **683.** $4x - 3y - 5z + 4 = 0$.

684. $36(x + y + z)^2 + 144(x + y - 1)^2 - 25y^2 = 0$. **685.** $3x^2 + 123y^2 + 23z^2 - 18xy - 22xz + 50yz + 18x - 54y - 66z + 27 = 0$.

686. $(x - \frac{5}{2}z)^2 + (y - \frac{3}{2}z)^2 = 25$. Вказівка. Рівняння напрямної має вид: $\frac{x-a}{\frac{a}{5}} = \frac{y-b}{\frac{b}{3}} = \frac{z}{2}$. Співвідношення, яке зв'яже параметри a і b , такі: $a^2 + b^2 = 25$.

687. 1) $2y^2 + 2z^2 - 2yz + 12y - 10z - 3 = 0$; 2) $(x - y)^2 + 3z^2 - 8(x - y) - 8z - 26 = 0$. **688.** $(2x + z)^2 - 10(2x + z) + 25y^2 = 0$.

689. а) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{20} = 1$; в) $\frac{x^2 + y^2}{25} + \frac{z^2}{2} = 1$.

690. а) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2 + y^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$. **691.** Оху: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

Оуз: $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, Охз: $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$. **692.** Дві прямі: $y - 4 = 0$, $y + 4 = 0$.

693. а) Еліптичний параболоїд; б) однопорожнинний гіперболоїд: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$; в) уявна сферична поверхня; г) гіперболічний циліндр; д) циліндрична поверхня, напрямна якої є коло.

694. Рівняння про-

екції: а) на площину Oxy : $\begin{cases} x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ б) на площину Oxz :

$\begin{cases} x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ в) на площину Oyz : $\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

695. Еліпс; $M(2, -1, 1)$ — центр цього еліпса. *Вказівка.* Центр перерізу проектується в центр проєкції. **696.** Гіпербола: $M(1, -1, -2)$ — центр цієї гіперболи. **697.** $(6, 2, -2)$. **698.** $m = \pm 18$. **699.** $2x - y - 2z - 4 = 0$.

700. $x - 2y + 2z - 1 = 0$, $x - 2y + 2z + 1 = 0$; $\frac{2}{3}$. **701.** $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$,

$\frac{x}{1} = \frac{y+9}{12} = \frac{z+3}{2}$. **702.** $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{-2}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$. **703.** $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{16} = 1$.

704. $\frac{(x-y+1)^2}{32} + \frac{(x-y-2z)^2}{24} + \frac{(x+y+z-1)^2}{3} = 1$. **705.** $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} + \frac{z^2}{\frac{100}{16}} = 1$.

706. $6x - 3y + 2z - 18 = 0$. **707.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{5} = 1$. **708.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} -$

$\frac{z^2}{9} = 1$. **709.** $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1, \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 0, \\ z = 2. \end{cases}$ **710.** $x - y + z - \frac{5}{2} = 0$.

711. l_1 : $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0, \\ x + 2y - 16 = 0; \end{cases}$ l_2 : $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$ **713.** $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+\frac{1}{2}}{2}$.

714. $2x + 2y - 3z \pm 12 = 0$. *Вказівка.* Визначимо координати точки дотикання з умови пропорційності коефіцієнтів двох рівнянь: $\frac{x_1x}{21} + \frac{y_1y}{6} + \frac{z_1z}{4} = 1$ і $2x + 2y - 3z + D = 0$ та з умови, що ці координати задовольняють рівняння еліпсоїда. **715.** $x - y - 2z - 2 = 0$. *Вказівка.* Розв'язавши задачу для параболоїда в загальному виді, переконатись, що умовам її може задовольняти не більш однієї площини. **716.** $x - 2y - 4z = 0$. *Вказівка.* Ця площина дотикається конуса вздовж всієї твірної конуса, яка проходить через дану точку. **717.** 1) $x - 3z = 0$ і $3x - 2y - 3z - 18 = 0$; пряма перетинає поверхню в двох дійсних точках; 2) дійсних дотичних площин провести не можна; пряма немає дійсних точок перетину з поверхнею; 3) $x - 2y - 3z - 6 = 0$; пряма дотикається поверхні і через неї можна провести тільки одну дотичну площину. **718.** $\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{6} = 1$; $x = \frac{x'+2y'+2z'}{3}$, $y = \frac{2x'-2y'+z'}{3}$, $z = \frac{2x'+y'-2z'}{3}$. **719.** $y'^2 + z'^2 = 4$; $x = \frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}$. **720.** $\frac{x'^2}{15} + \frac{y'^2}{5} - \frac{z'^2}{3} = 1$; $x = \frac{\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}y'-\sqrt{2}x'}{2}$, $z = z'$.

721. $x'^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{3}y'$; $x = x'$, $y = \frac{y'-2z'}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{-2y'-z'}{\sqrt{5}}$. **722.** $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$;

$(\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = -2)$ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'$,

$z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$. **723.** $z'^2 - 4 = 0$; $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6)$;

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'$.

724. $y'^2 - z'^2 = 1$; $(\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = -6)$; $x = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$,

$y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$. **725.** $\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$,

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z = z'$. **726.** $5y'^2 + 2\sqrt{13}x' = 0$; $x = \frac{2x'+3z'}{\sqrt{13}}$, $y = y'$,

$$z = \frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}}. \quad \mathbf{727.} \quad \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 1; \quad x + y = x'\sqrt{2}, \quad x - y + z = y'\sqrt{3}, \quad x - y + z = z'\sqrt{6}.$$

$$\mathbf{728.} \quad \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1; \quad (\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = -2); \quad x - y + z = x'\sqrt{3},$$

$$x - y - 2z = y'\sqrt{6}, \quad x + y = z'\sqrt{2}. \quad \mathbf{729.} \quad 3z'^2 = 4; \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 3);$$

$$x + y = x'\sqrt{2}, \quad x - y - 2z = y'\sqrt{6}, \quad x - y + z = z'\sqrt{3}. \quad \mathbf{730.} \quad -\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1.$$

$$\mathbf{731.} \quad 3x'^2 - 2z'^2 = 2y'. \quad \mathbf{732.} \quad \frac{y'^2}{12} + \frac{z'^2}{6} = 1. \quad \mathbf{733.} \quad \frac{x'^2}{14} + \frac{y'^2}{28} + \frac{z'^2}{7} = 1.$$

$$\mathbf{734.} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{z'^2}{1} = -2y'. \quad \mathbf{735.} \quad \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 2z'. \quad \mathbf{736.} \quad -\frac{x'^2}{2} + \frac{z'^2}{1} = 2y'.$$

$$\mathbf{737.} \quad x'^2 - y'^2 + z'^2 = 0. \quad \mathbf{738.} \quad x'^2 - 3y'^2 = 0. \quad \mathbf{739.} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{5} = -1.$$

$$\mathbf{740.} \quad x'^2 - 5 = 0. \quad \mathbf{741.} \quad \frac{x'^2}{15} + \frac{y'^2}{5} + \frac{z'^2}{10} = 1. \quad \mathbf{742.} \quad x'^2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}y'. \quad \mathbf{743.} \quad \frac{x'^2}{3} - \frac{z'^2}{3} = 2y'.$$

$$\mathbf{744.} \quad \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{\frac{32}{5}} + \frac{z'^2}{4} = 1. \quad \mathbf{745.} \quad x'^2 + z'^2 = 2y'. \quad \mathbf{746.} \quad \frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1. \quad \mathbf{747.} \quad y'^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}z'.$$

$$\mathbf{748.} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} + \frac{z'^2}{6} = -1. \quad \mathbf{749.} \quad \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 0. \quad \mathbf{750.} \quad A(0, 0, 0), \quad B(1, 1, 1).$$

Вказівка. Перейти до параметричних рівнянь прямої. **751.** $\vec{b}$ і $\vec{d}$. **752.** Розв'язування. Якщо $\vec{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ — напрямний вектор шуканої прямолінійної твірної, то параметричні рівняння цієї твірної запишуться так: $x = 1 + \alpha t$, $y = 1 + \beta t$, $z = 1 + \gamma t$. Підставивши ці значення в рівняння поверхні, після елементарних перетворень отримуємо: $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2(\alpha + \beta - \gamma)t = 0$. Пряма l буде прямолінійною твірною в тому і лише в тому випадку, якщо $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$, $\alpha + \beta - \gamma = 0$. Очевидно, $\gamma \neq 0$. Розділивши ці співвідношення на γ і вводячи нові невідомі $\frac{\alpha}{\gamma} = \xi$, $\frac{\beta}{\gamma} = \eta$, будемо мати $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $\xi + \eta = 1$. З цих двох рівнянь легко отримати значення ξ і η : $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 1$; $\xi_2 = 1$, $\eta_2 = 0$. Поклавши $\gamma = 1$, отримуємо координати двох напрямних векторів прямолінійних твірних: $\vec{p}_1(0, 1, 1)$, $\vec{p}_2(1, 0, 1)$. Таким чином:

$$\begin{aligned} x &= 1, & y &= 1 + t, & z &= 1 + t; \\ x &= 1 + t, & y &= 1, & z &= 1 + t. \end{aligned}$$

753. $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x - z + 2 = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$ **754.** 1) $(3, 4, -2)$ і $(6, -2, 2)$; 2) $(4, -3, 2)$ — пряма дотикається до поверхні; 3) пряма і поверхня не мають спільних точок; 4) пряма лежить на поверхні. **755.** $6y - 1 = 0$. **756.** $x + 3y - z - 1 = 0$. *Розв'язок.* Знайдемо координати вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, спряженого шуканій діаметральній площині

$$\frac{a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3}{A} = \frac{a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3}{B} = \frac{a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3}{C}.$$

Для даної задачі отримуємо: $\frac{6a_1 + 3a_2 + 2a_3}{1} = \frac{3a_1 + 9a_2}{3} = \frac{-2a_1 + a_3}{-1}$. Звідси $\vec{a}(2, -1, 5)$. Запишемо рівняння діаметральної площини, спряженої вектору $\vec{a}$: $x + 3y - z - 1 = 0$. **757.** $4x + 5y - 2z = 0$. *Вказівка.* При розв'язуванні задачі використати центр поверхні. **758.** $x + 3y + 2z + 2 = 0$.

759. $x - y - z = 0$. **760.** $10x - 7y + 17z - 20 = 0$. **761.** $38x + 39y - 20z - 1 = 0$.
762. $4x - y - 4z + 1 = 0$. **763.** а) $(1, 1, -1)$; б) $(0, 2, -2)$; в) $(\frac{3}{2}, 0, -1)$.
764. а) Пряма центрів: $3x - 2y = 0$, $y - 3z + 6 = 0$; поверхня третього типу: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{44} = 0$; б) немає центрів; поверхня другого типу; в) єдиний центр $(0, 0, 0)$, який належить поверхні; поверхня конічна; г) площина центрів $x + 4y - 4z + 5 = 0$, поверхня п'ятого типу: $\lambda_1 x'^2 + a'_{44} = 0$. **765.** а) Головні діаметральні площини: $2x + 2y - 1 = 0$, $3x - 3y + 3z - 4 = 0$, $6x - 6y - 12z - 7 = 0$; вісі: $\begin{cases} 3x - 3y + 3z - 4 = 0, \\ 6x - 6y - 12z - 7 = 0; \end{cases}$
 $\begin{cases} 6x - 6y - 12z - 7 = 0, \\ 2x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ 3x - 3y + 3z - 4 = 0; \end{cases}$ б) головні діаметральні площини: $4x + y + 2z + 7 = 0$, $x - 2y - z + 5 = 0$, вісь: $\begin{cases} 4x + y + 2z + 7 = 0, \\ x - 2y - z + 5 = 0; \end{cases}$
в) головні діаметральні площини: $x - z - 1 = 0$, $x - y + z = 0$, вісь: $\begin{cases} x - z - 1 = 0, \\ x - y + z = 0; \end{cases}$ г) головні діаметральні площини: $x + y = 0$, $3x - 3y - 6z - 1 = 0$, $3x - 3y + 3z + 5 = 0$, вісі: $\begin{cases} 3x - 3y - 6z - 1 = 0, \\ 3x - 3y + 3z + 5 = 0; \end{cases}$
 $\begin{cases} 3x - 3y + 3z + 5 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 3y - 6z - 1 = 0; \end{cases}$ д) головні діаметральні площини: $x + y + z + 1 = 0$, $2x - 4y + 2z - 1 = 0$, вісь: $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$
766. 1) $7x + 17y + 19z + 19 = 0$; 2) $2x + y + 3z + 4 = 0$; 3) $x + 5y + 6z + 7 = 0$; 4) $3x + 6y + 8z + 9 = 0$. **767.** $x = y = z$; $x - 2y + 1 = 0$. **768.** $x + 3y - z - 1 = 0$; $\frac{x+1/3}{2} = \frac{y-2/9}{-1} = \frac{z+2/3}{5}$. **769.** $27x - 33y + 37z + 44 = 0$. **770.** $2x + y + 4z = 0$.
771. $m_1 = n_1 = 0$, $p_1 = 1$; $m_2 = n_2$, $p_2 = 0$; $m_3 = -n_3$, $p_3 = 0$.
772. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. **773.** $x - y = 0$, $x + y - z = 0$, $3x + 3y + 6z - 2 = 0$.

Література

- [1] Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, Геометрия, ч. 1, М.: Просвещение, 1986.
- [2] В. Т. Базылев и др., Сборник задач по геометрии, М.: Просвещение, 1980.
- [3] Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян, Сборник задач по аналитической геометрии, М.: Просвещение, 1968.
- [4] Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян, Сборник задач по геометрии, ч. 1, М.: Просвещение, 1973.
- [5] О. Н. Цубербиллер, Задачи и упражнения по аналитической геометрии, М.: Наука, 1968.
- [6] Д. В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии, М.: Наука, 1975.